Міжнародна програма
«ЕВРИСТИКА ТА ДИДАКТИКА ТОЧНИХ НАУК»
International program
«HEURISTICS and DIDACTICS of EXACT SCIENCES»
Международная программа
«ЭВРИСТИКА И ДИДАКТИКА ТОЧНЫХ НАУК»

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: проблеми і дослідження

DIDACTICS of MATHEMATICS:
Problems and Investigations

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ:
проблемы и исследования

Міжнародний збірник наукових робіт
International Collection of Scientific Works
Международный сборник научных работ

Випуск 14

Труди Міжнародної науково-методичної конференції

«Евристичні методи у навчанні математики»

Засновники:

Донецька школа евристики та точних наук Донецької фірми наукоємних технологій (Фірми ТЕАН) Національної академії наук України

Національний педагогічний університет ім.М.П.Драгоманова

Донецький національний університет

Інститут педагогіки Академії педагогічних наук України

Донецьк Фірма ТЕАН 2000

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р
Д44

Збірник заснований професором Юрієм Олександровичем Палантом у 1993 році.

Рекомендовано до друку Вченою радою Донецького національного університету 24.11.2000 (протокол №10).

Д44 **Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. –** Вип. 14. Труди Міжнародної науково-методичної конференції «Евристичні методи у навчанні математики. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2000. – 159 с. (Міжнародна програма «Евристика та дидактика точних наук»).

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-04-01 (Фірма ТЕАН, Україна)

Викладено нові підходи до деяких питань методики навчання математики. Роботи присвячено використанню евристичних методів навчання, стимулюванню творчої діяльності учнів.

Изложены новые подходы к некоторым вопросам методики обучения математике. Работы посвящены использованию эвристических методов обучения, стимулированию творческой деятельности учащихся.

New approaches to some methods of training mathematics problems are described. The publications concern the use of heuristic methods in teaching sciences, stimulation of creative activity of students in the field of constructing and solving problems.

УДК 51(07)+53(07)
ББК В1 р

ISBN 966-7507-0-9 (серія)
ISBN 966-7507-04-01 (Фірма ТЕАН, Україна)

ПАМ'ЯТІ ПРОФЕСОРА Ю.О.ПАЛАНТА ПРИСВЯЧУЄТЬСЯ . . .

До 65-річчя з дня народження

З віршів Ю.О.Паланта

Я навсегда с тобою слит
И с болью от тебя оторван.
Пора . . . зеленый свет горит:
Судьба взяла меня за горло.

Пора в дорогу: час пробил.
Неумолимые колеса
Скрипят, стучат – и нету сил
На рельсы свою тяжесть сбросить.

Я улыбаюсь – я в бреду,
Я вопль несу, – а смех – наружу,
Я остаюсь – и я иду,
И раздвоенья не нарушу.

8 сентября, 1969, Харьков

Что ж – наказание: терпеть
И ждать. И двигаться к могиле.
А одиночество – как клеть,
Замкнувшая мое бессилье.

13 сентября, 1969

ДО УВАГИ ЧИТАЧІВ

Постановою Президії ВАК України від 10.11.99 № 3-05/11 затверджено перелік № 3 наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук. До розділу "Педагогічні науки" включено наш збірник наукових праць "Дидактика математики: проблеми і дослідження" (Бюллетень ВАК України, 1999, № 6), який є продовженням видання "Евристика та дидактика точних наук" міжнародного збірника наукових робіт. Нумерація випусків продовжується.

ПРОФЕССОР ПАЛАНТ ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
(1935-1999)

Р.М.Тригуб, профессор, доктор физ.-мат.наук,
Донецкий национальный университет

Я приведу некоторые биографические данные и расскажу очень кратко о научной работе, методической и организационной профессора Паланта Ю.А.

Юрий Александрович относится к поколению детей войны (в 1945 г. ему было 10 лет) и шестидесятников (на III курсе университета прослушал закрытый доклад Н.Хрущева о И.Сталине). Мы с ним ровесники: в одно время учились в университете, но в разных городах, и работали рядом и вместе в Донецком университете почти 30 лет.

1. Юрий Александрович родился в Харькове 26 августа 1935 г. Отец погиб на фронте в 1945 г. в звании подполковника. Мать Ширшова Ольга Ивановна еще в 60е годы работала в УХИНе химиком-лаборантом. С 1941 по 1944 – в эвакуации (Казахстан, Башкирия, Москва). С 1944 до января 1971 – в Харькове (кроме аспирантских 3-х лет). Отлично закончил среднюю школу в 1953г. и университет в 1958г. В ХГУ был членом комсомольского бюро факультета, председателем СНО, руководителем городского математического кружка. В Харькове тогда работали известные профессора-математики: Н.И.Ахиезер, Б.Я.Левин, Я.Л.Геронимус, И.М.Глазман, М.С.Ливщиц, В.А.Марченко, А.В.Погорелов, А.Д.Мышкис, А.К.Сушкевич, Г.И.Дринфельд, … В 50-60-е годы Харьков входил в первую пятерку математических научных центров Союза.

1958-1961 – аспирантура в инженерно-строительном институте Одессы под руководством М.Г.Крейна. В 1997г., когда Марку Григорьевичу исполнилось бы 90 лет, вышел ему посвященный выпуск Украинского математического журнала, а в США проведена научная конференция. После возвращения в Харьков один год Юрий Александрович работал почасово в автодорожном институте, а в 1962-1965гг. – в авиационном . 1965-1971 – родной ХГУ (в последнее время – на кафедре математической физики физико-технического факультета).

С февраля 1971 – в Донецке. Читал курсы: высшей математики, математического анализа, теории вероятностей, функционального анализа и разные специальные. Спецкурс «Неравенства» , разработанный Юрием Александровичем, мы сохраним.

Был редактором факультетской газеты (1975-1977гг.). Более десяти лет был официально зам.зав.кафедрой математического анализа и теории функций, а в 1985-1990 – заведующим. Дело в том, что ранее беспартийный не мог быть заведующим. В подтверждение приведу пример из своей биографии. В 1974 г. проректор ДонГУ по научной работе предложил мне двухлетнюю докторантуру для завершения диссертации. Я собрал нужные отзывы, а в Министерстве – отказ. Зав.аспирантурой МВССО УССР, объясняя причину отказа, сказала, дословно, следующее: «Недавно из ЦК КПСС мы получили инструктивное письмо, в котором сказано, что руководящие должности должны занимать члены партии…» 1974г. – начало расцвета застоя.

И после 1990г. Юрий Александрович помогал заведующему. Никто не мог быстрее и лучше его составить разного рода документы (справки).

2. Более чем за 40 лет преподавания в вузах опубликовал более 200 работ. Только за пятилетие 1978-1983 – более 60. Три направления: теория операторов, гидроэкструзия и эвристические методы в обучении математике.

а) Кандидатская диссертация посвящена спектральной теории операторных пучков. Основные публикации в Докладах АН СССР, Украинском математическом журнале. Некоторые результаты попали в монографии Ц.Ц.Гохберга, М.Г.Крейна и Н.Данфорда, Дж.Шварца, т.3 и обзор по отечественной математике (см.пособие «Спектральная теория операторных пучков», 2 п.л. Донецк, 1975 (соавтор – Мацаев В.И.). Есть и несколько работ по дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Всего – около 15 публикаций.

б) Прикладная математика.

С 1976г. вел кафедральную хоздоговорную тему «Создание математической модели метода гидроэкструзии и ее экспериментальная проверка» вместе с сотрудниками физико-технического института АН УССР. Гидроэкструзия – это обработка металлов давлением, при которой заготовка выдавливается через канал матрицы воздействием на нее жидкости высокого давления.

Основные публикации: Доклады АН УССР, Изв.вузов:черная металлургия (много статей), Физика и техника высоких давлений, т.1 (1992). Всего – более 50 публикаций.

Имеются также 3 публикации по эпилепсии (соавтор – кандидат медицинских наук Ф.Р.Вуль). См. «Невропатология и психиатрия», т.82, №6, М.1982. Обработка статистических данных, определение скрытых периодичностей и т.п.

в) Больше всего времени и сил Юрий Александрович уделял вопросам обучения математике студентов и школьников. Первые публикации – в 1973г.

I – программированное обучение (управляющие тесты).

В середине 70х годов Юрий Александрович был пионером в этом деле и не имел поддержки на кафедре и факультете.

См., например, 1) Метод управляющих тестов – новый вариант программированного обучения. Владимир.1974. 2) Управляющие программы в обучении математике. Учебное пособие. 4 п.л.1978.

Вместе с соавторами на факультете были изданы программированные задания по интегральному исчислению, по теории функций комплексного переменного, по алгебре и началам анализа. В 70-е годы из трех его экспонатов на ВДНХ СССР два отмечены бронзовыми медалями.

II – эвристика (наука, изучающая продуктивное творческое мышление).

Классическому анализу (в широком смысле) мы учились по книгам М.Ж.Валле – Пуссена «Курс анализа бесконечно малых», Дж.Пойя и Г.Сеге «Задачи и теоремы из анализа», 2т.; Е.Титчмарша «Теория функций»; Ф.Рисса и Б.Секефальви-Надя «Лекции по функциональному анализу». Основными разработками по эвристическим методам в математике являются следующие книги Д.Пойя: «Математика и правдоподобные рассуждения», «Как решать задачу», «Математическое открытие». См. брошюру Юрия Александровича (совместно с его аспиранткой) «Эвристика в математических задачах» (для учителей и учеников) 1999. Подготовил без аспирантуры двух кандидатов педагогических наук: Н.В.Чхаидзе (Грузия) и Е.И.Скафа (ДонНУ). Из четырех его аспиранток в последние годы хотя бы две должны бы защититься.

Юрий Александрович собирался издать большую монографию, но не удалось.

3. Общественной работы у Юрия Александровича, который никогда не был членом партии, было больше, чем можно себе представить.

Первым председателем методической комиссии математического факультета был член-корр. АН УССР И.И.Гихман. А вторым – Юрий Александрович. Кроме того, он был членом методического совета ДонГУ и членом метод.комиссии Минвуза Украины. С 1993г. был членом Академии высшей школы (в нее входят все доктора наук, работающие в вузе, и небольшой процент кандидатов наук).

Недавно факультет перешел на двухступенчатое образование (бакалавр, специалист). Имеем два направления: математика и математическое образование. Новые программы. Юрий Александрович во второй раз согласился возглавить метод. комиссию факультета и проделал большую работу по разработке и внедрению новых планов. Руководил на кафедре программой «Учитель».

Организовал издание в Донецке научно-методического сборника, который признан ВАКом Украины. Сейчас нужно сохранить сборник, увеличить его объем, не понижая, а повышая научный уровень публикаций.

Много времени уделял работе с учителями и учениками средних школ. Еще в Харькове читал лекции в Центральном Лектории и по телевидению для абитуриентов. В 1973, 1974 и 1975 гг. издал вместе с соавторами три пособия для поступающих в вузы (Киев, Вища школа). Руководил научным обществом «Поиск» (1973-1978), школой юных математиков при факультете, Малой академией наук. Руководил организацией городских и областных олимпиад школьников, готовил победителей к республиканским олимпиадам. С 1981г. руководил турниром городов, на который допускаются школьники без всякого отбора. И все это до самого последнего времени.

Приглашал лучших учителей читать спецкурсы и участвовать в работе ГЭК на факультете.

Член редколлегии журнала «Математика в школі». Считаю, что наш регион и далее должен быть представлен в редколлегии журнала.

Многие помнят перестройку математического образования в средних школах СССР в 1968-1978гг. Я слушал доклад А.Н.Колмогорова об этом на Международном конгрессе математиков в Москве – 1966. Несколько наших доцентов, включая Юрия Александровича, опубликовали две статьи в 1976 и 1979 гг. в журнале «Математика в школе» с частичной критикой проекта программ. Значительно позже стало ясно, что та перестройка не удалась.

А теперь о личных качествах Юрия Александровича.

Целыми днями – на работе, безотказный (замена заболевшего преподавателя, помощь коллегам в приеме экзаменов и т.п.). Стажировка и ФПК для преподавателей вузов введены с 1972 г. (3-4 месяца в 5 лет). Уходил на стажировку редко и только на один месяц.

С 1992г. в ДонГУ появились два потока студентов (русский и украинский). Замечу, что я считаю, такое решение единственно правильным для

Донбасса. Постоянным лектором на украинском потоке математиков с самого начала был Юрий Александрович. И он болел за Украину.

Об его отношении к коллегам, которых уже нет, говорит тот факт, что он в 1999г. издал книгу Г.Д.Суворова «Основы научных исследований» (через 15 лет после смерти основателя нашей кафедры).

Год назад (он уже чувствовал, что смерть близка) на кафедре в присутствии нескольких человек он спросил: что будет с кафедрой, когда нас не будет? Я сразу сказал, что ничего не изменится. Сейчас я бы так не сказал по отношению к нему только. Его сейчас заменяют несколько человек… После нас остаются труды и дети (включая учеников). Дети и память коллег…

4. Несколько слов в заключение.

Настоящая конференция посвящена вопросам преподавания математики в вузах и школах.

Когда-то в Москве проводили совещание зав. математических университетских кафедр, где выступали известные ученые мирового уровня. Когда-то профессор Дороговцев А.Я. из КГУ проводил совещания зав. кафедр математического анализа, на котором принимали программу-минимум по своему предмету. Еще ранее (1968г.) в Запорожье я, будучи молодым доцентом, был на совещании по вопросам преподавания высшей математики в технических вузах Украины.

Сейчас положение науки и образования ухудшается. Хотя по-прежнему есть и всегда будут молодые и способные к математике школьники, студенты, аспиранты.

Образование – консервативная система. Для резкого улучшения результатов, как я считаю, не может быть революций, не может быть одного универсального средства (метода). Сохранить бы достигнутый уровень. Конечно, должны быть и поиски, и новшества. Стандарты и рейтинг-контроль, тесты и программированное обучение, эвристические методы и моделирование, использование компьютеров и др.

ПРОБЛЕМИ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОЇ ПІДГОТОВКИ ПЕДАГОГІЧНИХ КАДРІВ

З.І.Слєпкань, професор, доктор пед. наук,
Національний педуніверситет ім.М.П.Драгоманова, м.Київ

Загальновизнаним фактом є те, що майбутнє будь-якої держави і людської цивілізації в цілому визначається тим, яка в ній буде створена система освіти.

Особливості нинішнього етапу становлення людської цивілізації пов'язані із загостренням цілого комплексу ключових проблем розвитку суспільства. До них належать економічні, екологічні, енергетичні кризи, а також загострення соціальних і національних конфліктів. Техногенний тип культури, технократичне мислення, які на перших етапах розвитку сучасного суспільства сприяли науково-технічному і соціальному прогресу, сьогодні активно породжують засоби знищення цивілізації. У всьому світі в структурі особистості починають панувати прагматизм і духовне збіднення, антинаукові забобони, спостерігається падіння престижу освіченості і загального стану наукової грамотності. Спеціалісти стверджують, що джерела явних ознак дефіциту духовної культури і раціонального наукового мислення в нашій країні слід шукати поряд з важким економічним станом і політичними проблемами в вадах системи освіти. Більше того, дехто з спеціалістів, зокрема Лисенко В.К. в статті «Концепция глобального образования» (журнал «Народное образование»,1993, №№7,8,9) зазначає, що «школа сьогодні не менш ніж суспільство і держава винна в загрозливому зростанні масової аморальності і безвідповідальності, в поширенні на планеті смертоносних епідемій, насильства, наркобізнеса, міжрелігійного і міжнаціонального антагонізму. І ця обставина разом з іншими стає сьогодні підставою для пошуку шляхів реформування освіти, що не виправдовує свого громадського призначення».

Сьогодні вирішальне значення для економічної ефективності і конкурентноздатності тієї чи іншої країни , забезпечення її інтелектуальної самостійності і власного місця в сучасному , все більш взаємопов'язаному світі, набувають не лише для певних груп, а населення в цілому, наукові і технічні знання, високі моральні якості особистості, її інтелектуальний і творчий потенціал, винахідливість, ініціатива, почуття нового, здібність адаптуватися до умов, що змінюються. Ці вимоги суспільства до особистості викликані тим, що при наявності такої досконалої техніки і таких високих технологій, які мають людство на межі XX, XXI століть, їх високоефективне використання, не кажучи вже про створення і вдосконалення нового, можливе лише при наявності працівників з вказаними вище якостями.

Щодо інтелектуального потенціалу особистості і країни в цілому, то як зазначив відомий дидакт І.Я.Лернер на міжнародному симпозіумі, ще в листопаді 1989 року, неправомірно під інтелектуальним потенціалом розуміти лише сукупність дарувань певної частини, еліти населення. «Думається, що сьогодні всі цивілізовані країни підготовлені до іншого розуміння інтелектуального потенціалу як сукупності дарувань всього покоління в цілому, всієї молоді і здорової частини суспільства».

Тому сьогодні все більш фахівців, громадських міжнародних організацій сходяться в тому, що ключ до майбутнього, до розв'язання сучасних проблем виживання людського роду, розвитку суспільства в інтересах людини лежить перш за все в освіті **всього населення** і в постійному підвищенні рівня його освіти (принцип безперервності освіти).

Життя свідчить про те, що чим далі розвивається цивілізація, тим в більшій мірі люди без освіти виштовхуватимуться за межі умов життя, достойних людини. Тому ущемлення права на освіту і її належної якості приведуть до інтелектуальної і культурної деградації особистості, що не сумісне з установленим розвитком суспільства.

Ще в 1988 році в рішеннях конференції нобелевських лауреатів (більше 70 чоловік) в Парижі було записано: «Освіта повинна мати абсолютний пріоритет в бюджетах всіх держав і сприяти розвитку всіх видів творчої діяльності». Сьогодні, як ніколи в минулому, стали актуальними слова Герберта Уеллса, який сказав: «Все больше и больше человечество представляет собой бег наперегонки между образованием и катострофой».

Ми вступаємо в нове століття, яке часто називають інформаційним, комп'ютерним. Постіндустріальне суспільство переростає в інформаційне, за яким починають вимальовуватися контури суспільства знання або освіти. Тому сучасне суспільство ставить перед системою освіти нові завдання, пов'язані з виробленням педагогічної стратегії в умовах масової комп'ютеризації і інформатизації всіх сторін життя суспільства.

Зазначені вище фактори спонукали в останні два десятиріччя всі розвинени країни світу шукати нову парадигму реформування освіти, нові моделі і освітні технології.

В осені 1995 року в Києві відбувалися другі академічні читання Міжнародної академії наук вищої освіти. В матеріалах цих академічних читань була сформульована нова парадигма освіти (загальної середньої і вищої), яка в якості пріоритету освіти розглядає орієнтацію на інтереси особистості, **адекватні сучасним тенденціям суспільного розвитку.**

Освіту можна вважати спрямованою на інтереси особистості, якщо через неї можна розв'язувати такі завдання:

- гармонізувати відношення людини з природою через засвоєння сучасної наукової картини світу ;
- стимулювати її інтелектуальний розвиток і збагачення мислення, творчості через засвоєння сучасних методів і засобів наукового пізнання;
- виходячи з того, що людина живе в суспільстві, домогтися її успішної соціалізації через занурення в існуючу культуру, в тому числі і технологічну, в комп'ютеризоване середовище;

- враховуючи, що сучасна людина проживає в умовах насиченого активного інформаційного середовища, навчити людину жити в його потоці, створити умови для безперервної освіти (ось чому в школі і у вузі до цього часу залишається актуальним завдання навчити учнів і студентів вчитися);

Нова освітня парадигма стосовно вищої освіти передбачає також становлення компетентності, ерудиції, творчості і культури особистості. В цьому головна її відміна від старої парадигми, яка в основному була парадигмою навчання, провідним прапором якої були знання , вміння , навички і виховання.

Пошук шляхів впровадження нової парадигми і провідних нових моделей освіти, зокрема і в підготовці педагогічних кадрів, не повинен звестися до простого збільшення обсягів змісту ряду навчальних дисциплін, введенню нових або збільшення термінів навчання. Мова повинна йти про досягнення принципово нових цілей освіти, в тому числі і педагогічної, які раніше так ніколи не ставилися і які полягають в досягненні якісно нових рівнів освіченості окремої особистості і суспільства в цілому.

На тих самих других академічних читаннях Міжнародної АН вищої освіти Михайло Згуровський визначив основні обриси нової національної моделі вищої освіти в Україні, які на той час визначали основу концепції вищої освіти. Серед десяти основних факторів, які мають визначити нову національну модель вищої освіти, були названі багатоваріативність учбово-методичної роботи: самостійне визначення вузами форм та методів учбового процесу, впровадження прогресивних педагогічних технологій та різних форм контролю знань студентів, використання прискореного навчання за індивідуальними учбовими планами; **пошук, підтримка та стимулювання розвитку обдарованих дітей, підлітків, юнацтва, диференційоване навчання найобдарованіших студентів.**

Вже аксіомою стало твердження, що центральною фігурою в школі є вчитель, а в вищих закладах освіти – викладач. На викладачів, які здійснюють підготовку вчителя, покладається особлива відповідальність, бо саме вони повинні здійснювати підготовку вчителя, «здатного забезпечити всебічний розвиток людини як особистості і найвищої цінності суспільства», готувати вчителя на рівні світових стандартів , конкурентноздатного спеціаліста, якому доводиться вже сьогодні працювати в умовах ринкової економіки.

Щодо проблеми диференційованої підготовки майбутнього вчителя , викладача вищих закладів освіти, то сама багатоступенева система вищої освіти передбачає пошук шляхів розв'язання названої проблеми і створює умови для цього. Слід зазначити, що рівнева диференціація певною мірою здійснювалась і в традиційній системі підготовки вчителя. Викладачі, які працювали і працюють зараз творчо, з високим рівнем відповідальності , а не бачать студента лише через стіл під час екзаменів, намагались принаймні на практичних заняттях створювати умови для подальшого розвитку їх математичного мислення, професійних якостей вчителя (навантажували їх вправами високого рівня складності, творчого характеру, залучали до роботи в студентських гуртках, проблемних групах, пропонували їм теми дипломних (кваліфікаційних) робіт, в яких максимально могла проявитись самостійність і математична та педагогічна творчість). Інакше, звідки ж беруться переможці міжвузівських студентських олімпіад, достойні аспіранти і докторанти – випускники педвузів? І все ж диференціація в традиційному розумінні не задовольняє сучасні вимоги суспільства до ступеневої підготовки фахівців. Слід зазначити, що магістри, яким присвоюється найвищий освітньо-кваліфікаційний рівень педагогічного працівника, мають поповнювати викладацький корпус вищих закладів освіти, спеціалізованих фізико-математичних шкіл і шкіл нового типу (гімназій, колегіумів). Вони є найбільш бажаним контингентом вступників в аспірантуру, можуть працювати в науково-дослідних установах України. Магістри педвузів «мають оволодіти поглибленими фундаментальними знаннями, психолого-педагогічними і фаховими знаннями інноваційного характеру, набути в період навчання досвіду застосування та продуктування нових знань для вирішення проблемних педагогічних і науково-дослідницьких завдань в галузі середньої і вищої освіти» (див. Концепція педагогічної освіти , МО України, с.12).

Щоб розв'язати якісно поставлені завдання підготовки магістрів необхідна рівнева диференціація навчання майбутніх магістрів ще з першого курсу. Як для середньої школи під рівневою диференціацією процесу навчання в педагогічному вузі (і не лише педагогічному), на нашу думку, слід розуміти диференційоване навчання на основі безумовного досягнення всіма студентами вимог державного стандарту і створення на цій основі умов для здібних і обдарованих студентів щодо поглибленого і дещо розширеного вивчення ними навчального матеріалу з фундаментальних навчальних дисциплін, дисциплін фахового спрямування , методик навчання шкільних предметів, а також з дисциплін, які забезпечують соціально-гуманітарну і психолого-педагогічну підготовку. Якщо обмежитись поглибленням і розширенням змісту підготовки магістрів лише в період навчання їх в магістратурі, розв'язати поставлені завдання якісної диференційованої підготовки неможливо.

Шляхи такої диференційованої підготовки педагогічних кадрів вже починають розроблятися науковцями і практичними працівниками вузів України. Так, доктор педагогічних наук, доцент Дніпродзержинського технічного університету Крилова Тетяна Вячеславівна висуває пропозицію: на основі діагностики навченості і рівня математичного розвитку студентів-першокурсників (можливо з різних факультетів), які вивчають вищу математику, відібрати здібних і обдарованих студентів і запропонувати їм вивчати за спеціальною програмою розширений і поглиблений лекційний курс. Аналогічну роботу можна організувати і при проведенні практичних, семінарських і лабораторних занять. Зрозуміло, що читати лекції і проводити інші види занять для таких студентів повинні найбільш кваліфіковані з погляду і наукової, і педагогічної діяльності фахівці.

В педвузах, де невелика кількість студентів-першокурсників і немає можливості виділяти окремий потік, доцільно теж запропонувати кращим студентам вивчати лекційний курс за програмою вищого рівня, а на практичних і семінарських заняттях, лабораторних роботах широко практикувати групові форми роботи в середині студентської групи. Важливий при цьому демократичний підхід до організації навчання: студенти самі повинні зробити вибір щодо рівня навчання.

Дуже часто в вищих закладах освіти про забезпечення різнорівневої підготовки ведуться лише заклики, а реальної практичної роботи до цього часу дуже мало. Наведу приклад з діяльності нашого педуніверситету по вивченню студентами іноземної мови. Сьогодні багато першокурсників, особливо з міст, одержують солідну підготовку з іноземних мов в школах нового типу, спеціалізованих школах і класах з поглибленим вивченням іноземної мови. Коли вони поступають в вуз, то, як правило, попадають в підгрупи, де є багато студентів з надзвичайно низьким рівнем підготовки з іноземної мови. І починається навчання, яке не лише не спрямоване на зону найближчого розвитку сильних студентів (за С.Л.Виготським), а гальмує такий розвиток. Те саме часто відбувається і на заняттях з вищої і елементарної математики.

Надзвичайно важливим в реалізації диференційованої підготовки є не лише вхідна діагностика, а і діагностика протягом навчання на всіх курсах, своєчасний контроль результатів навчання і математичного розвитку студентів, організація їх творчої діяльності, розвиток продуктивного мислення як під час навчання, так і в період проведення педагогічної практики. З цього приводу доцільним є створення викладачами кафедр різнорівневих завдань, дидактичних та роздавальних матеріалів.

До цього часу в нашому вузі і в інших педвузах зокрема не знайдено ефективної організації державної атестації студентів. На одних факультетах студенти складають по одному державному іспиту, на інших – по 3-4. На одних всі складають державний екзамен і всі виконують дипломну (кваліфікаційну) роботу, на інших дипломні роботи виконує лише частина студентів.

Підсумовуючи вищесказане, хочеться відзначити, що у впровадженні багатоступеневої підготовки педагогічних кадрів і, зокрема, в реалізації диференційованої навчально-виховної роботи потрібні творчі пошуки раціональних шляхів розв'язання цих проблем. Необхідні серйозні експериментальні дослідження, узагальнення і корекція вже набутого досвіду в нових соціальних умовах на основі збереження всього позитивного , що було напрацьовано у вищих закладах педагогічної освіти.

Резюме. В свете современной парадигмы образования раскрывается проблема дифференцированной подготовки будущего учителя математики. Отмечается необходимость экспериментальной проверки путей дифференцированного обучения при проведении различных видов занятий.

Summary. The problem of differentiated training of future math teacher is opened through modern paradigma of education. There is noted that experimental check differentiated training waies in execution of different forms classes is necessary.

МАТЕМАТИКА КАК ИНСТРУМЕНТ ФОРМИРОВАНИЯ ИНЖЕНЕРНОГО МЫШЛЕНИЯ

В.В.Пак, профессор, доктор техн.наук,
лауреат Госпремии СССР, засл. деят. науки и техники Украины,
Донецкий государственный технический университет

Возникновение научного мышления обусловлено открытием числа, которое для человечества было не менее важным, чем открытие огня. Математика, по-сути, – это зерно, из которого выросла вся наука и не только потому, что на примере «Геометрии» Евклида она показала блистательный пример того, как строить самое себя, но и послужила строительным материалом для теоретических моделей других наук. Сейчас математика так проникла во все виды человеческой деятельности, что уже никого не удивишь такими словосочетаниями как математическая биология, математическая география, математическая лингвистика и др. Более того, возникновение такого «кентавра» означает, что в данной отрасли знаний период накопления информации закончился и начался период ее осмысления, что из описательной данная наука стала превращаться в науку точную, а скорость ее развития резко возросла. Так что же дает людям сугубо теоретическая наука математика? Ведь она не обеспечивает нас новыми видами энергии, как физика, новыми веществами, как химия, новыми машинами, как техника!

Во-первых, математика умеет наиболее полно и компактно представить научную информацию в виде формулы или уравнения об интересующем нас объекте. Например, в течение многих веков люди накапливали сведения о механическом движении тел, которые Ньютону удалось втиснуть в маленькую формулу, именуемую вторым законом механики.

Во-вторых, математика является единственным орудием теоретического изучения окружающего мира путем моделирования протекающих в нем процессов, на основе чего делается предсказания новых явлений, для обнаружения которых ставятся эксперименты (природе задается вопрос). Если ответ на него положителен, то идем дальше (задаем новый вопрос), если нет, то еще лучше: уточняем теорию (недаром физики говорят, что чем дальше эксперимент от теории, тем он ближе к Нобелевской премии).

В-третьих, математика – лучший тренажер человеческого интеллекта. Вспомним ломоносовское: «А математику затем учить нужно, что она в порядок ум приводит!» Когда нобелевского лауреата и основоположника квантовой механики Макса Планка спросили, что такое образование, он ответил: «Это то, что остается, когда все изученное забудется». Что же остается от математики, когда забудутся ее определения и теоремы? Математический образ мышления – строгий, последовательный и доказательный. Это самое большое богатство образованного человека!

В-четвертых, в математике невозможно «схимичить», поэтому она выступает как воспитатель высоких нравственных качеств человека!

И наконец, в-пятых, математика – это величайшее культурное наследие человечества такое, как литература, музыка, театр, спорт и т.д. Не знать математику также стыдно, как не уметь читать, не любить музыку, не понимать живопись или тонуть в речке, где воробью по колено.

Итак, с математикой все ясно. А кто такой инженер? Хотя эта профессия одна из самых массовых на Земле, но кто он такой, вы не узнаете даже из Энциклопедического словаря, содержащего более 80 тыс. статей (для актера, врача, космонавта, генерала и др. в нем нашлось место, не говоря уже о рабочем классе и крестьянстве!). Так кто же он такой!?

Инженер – это специалист, имеющий дело не с природными явлениями, а с плодами собственного труда: механизмами, машинами, технологическими процессами и т.д. Теоретической основой его творчества являются технические науки, отличающиеся наибольшей изменчивостью («период полураспада» технической информации составляет 5-10 лет), поэтому инженеру, как никому другому, приходится непрерывно пополнять и обновлять свои знания, для чего он должен иметь «мощную фундаментальную подготовку» особенно по математике, которая благодаря наибольшей устойчивости выполняет роль «цемента», скрепляющего быстро растущее здание нашей цивилизации.

Инженер общается не с упрощенными моделями, а с реальными объектами во всей полноте их функционирования. А для этого он должен иметь самый широкий кругозор. Конечная его цель – не столько установление закономерностей изучаемого процесса, что интересно физику, сколько использование полученной информации для переделки объекта в нужном направлении. Такое всевластие инженера над вещами дает ему исключительную возможность использовать в своей деятельности методы других наук, отдавая предпочтение наиболее простым из них.

Действительно, если результаты исследования показали сложный и не совсем понятный характер процесса, то инженер (в отличие от математика) не спешит с построением сложной модели, поскольку эти сложности, как правило, – результат несовершенства процесса из-за наличия в нем «шумов». Внести «шумы» в модель – значит увековечить их в объекте! Поэтому инженер идет другим путем. Глубокий качественный анализ, в основе которого лежит интуиция, умение «войти в образ» объекта, позволяют ему вскрыть технические противоречия, устранить их с помощью изобретения, «срезать шумы» и заодно получить простое описание объекта. Чем глубже качественный анализ, чем весомее изобретение, тем проще аналитическое описание, и наоборот! Эта сторона инженерного творчества близка к творчеству писателя и актера. Поэтому инженер – это боксер, одинаково хорошо работающий и в право и в левосторонней стойках (напомним, что левое полушарие мозга отвечает за логическое мышление и как бы дифференцирует окружающую действительность, а правое обеспечивает ее целостное, интегральное восприятие).

Инженер, в отличие от специалистов «свободных профессий», должен решить поставленную задачу на данном уровне, в течение заданного времени, не выходя за рамки финансовых ограничений (столь «зубодробительных» условий – нет ни у кого!). Чтобы добиться успеха, ему приходится проявлять чудеса изворотливости, открывать иногда то, что никому не известно, создавать новые методы, в том числе и математические. Достаточно вспомнить гениального Архимеда, открывшего определенный интеграл за две тысячи лет до того, как об этом задумались математики, или, скажем, Хэвисайда, который, чтобы спасти трансатлантический телеграфно-телефонный кабель, связавший Америку и Европу и вместо информации выдававший шум, разработал операционное исчисление, которое вначале математики освистали, а затем молчаливо проглотили! Нелишне напомнить, что и Ньютон с изобретенным им зеркальным телескопом, и Чебышев, чья «стопоходящая машина» исследует Марс, и Эйнштейн, сделавший свои наиболее весомые открытия будучи инженером Швейцарского патентного ведомства, и многие другие прежде всего были инженерами.

Итак, главное предназначение инженера – изобретательство, а основной инструмент последнего – эмпатия (уподобление себя улучшаемому объекту). Ведущим в этом процессе является артистическое правое полушарие, левое же должно не мешать, поскольку преждевременная критика разрушительна. Когда основное дело сделано (шумы срезаны), наступает пора оптимизации параметров объекта, для чего необходима его математическая модель. Здесь уже правит бал левое полушарие мозга. Следовательно, инженер-творец должен не только иметь хорошо развитые оба начала (артистическое и рациональное), но и уметь их вовремя переключать.

Математика, как основной воспитатель рационального начала человека, не должна забивать его артистичность (загонять мышление в жесткие рамки логики), и ее не должно быть слишком много, она должна учитывать специфику инженерного творчества. Здесь важно не то, как формулируется и доказывается данная теорема, а то, откуда она взялась, почему в ее формулировке содержатся приведенные ограничения, каковы ее аналоги в реальном мире, как додумался до нее ее творец, и почему это не сделали раньше и т.д., т.е. главное – это раскрыть творческую лабораторию математика-творца, ибо настоящий талант можно воспитать, анализируя творчество другого таланта.

Недаром говорят, что хорошего математика может подготовить талантливый математик, хорошего физика – хорошая кафедра физики, а хорошего инженера – хороший технический университет при четком взаимодействий всех его кафедр!

Резюме. В роботі визначається роль математики для розвитку інтелекту, що сприяє формуванню інженерного мислення.

Summary. The role of mathematics for development of intellect which forms the engineering thinking is defined.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТА И НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Ю.В. Гандель, профессор, док. физ.-мат. наук,
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Одна из основных целей теоретического исследования в любой области знаний состоит в том, чтобы найти такую точку зрения, с которой объект представляется в своей предельной простоте.
Джосайя Уиллард Гиббс
(американский физик-теоретик конца XIX века)

Не следует слишком полагаться на проницательность читателей: иной раз полезно разжевать свою мысль.
Антуан де Ривароль
(французский писатель XVIII века)

1. *Определим сингулярный интеграл с ядром котангенс.*

Пусть $u(\varphi)$ – 2π-периодическая функция, такая, что для любых (достаточно малых) $\varepsilon > 0$ существуют интегралы

$$\int_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)\,d\varphi, \quad \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)\,d\varphi$$

Предположим также, что существует предел при $\varepsilon \to +0$ суммы этих интегралов. Тогда, *по определению,*

$$\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)\,d\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)\,d\varphi + \int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)\,d\varphi\right\}.$$

Достаточным условием существования так определенного сингулярного интеграла с ядром котангенс является принадлежность функции $u(x)$ классу Гёльдера. В этом случае имеем

$$\int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)d\varphi + \int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[u(\varphi)-u(\varphi_0)\right]d\varphi + \int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[u(\varphi)-u(\varphi_0)\right]d\varphi +$$

$$+u(\varphi_0)\left[\int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi + \int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi\right]$$ и поскольку

$$\int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi + \int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{-\varepsilon} ctg\frac{\phi}{2}d\phi + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi} ctg\frac{\phi}{2}d\phi = 0,$$

а функция $ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[u(\varphi)-u(\varphi_0)\right]$ мажорируется интегрируемой функцией, то переходя к пределу в выражении для суммы интегралов

$$\int\limits_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)d\varphi + \int\limits_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)d\varphi$$ при $\varepsilon \to +0$, окончательно получаем

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}u(\varphi)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[u(\varphi)-u(\varphi_0)\right]d\varphi} \qquad (1)$$

Отметим, что при доказательстве этого факта использован, проверенный выше, его частный случай

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi = 0} \qquad (2)$$

2. Сингулярный интеграл с ядром котангенс, деленный на 2π, на пространстве тригонометрических полиномов – *оператор Гильберта* вычислим *на базисе* этого пространства $\{e^{ik\varphi}\}, k \in \mathbb{Z}$.

При $k = 0$ имеем (2).

При целом положительном k $(k \in \mathbb{N})$ получаем

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left(e^{ik\varphi}-e^{ik\varphi_0}\right)=i\frac{e^{i\varphi}+e^{i\varphi_0}}{e^{i\varphi}-e^{i\varphi_0}}\left[\left(e^{i\varphi}\right)^k-\left(e^{i\varphi_0}\right)^k\right]=$$
$$=i\left(e^{i\varphi}+e^{i\varphi_0}\right)\left(e^{i(k-1)\varphi}+e^{i(k-2)\varphi}e^{i\varphi_0}+\ldots+e^{i\varphi}e^{i(k-2)\varphi_0}+e^{i(k-1)\varphi_0}\right),$$

так что имеет место тождество

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left(e^{ik\varphi}-e^{ik\varphi_0}\right)=i\left(e^{ik\varphi}+2e^{i(k-1)\varphi}e^{i\varphi_0}+\ldots+2e^{i\varphi}e^{i(k-1)\varphi_0}+e^{ik\varphi_0}\right),\ k=1,2,\ldots \quad (2+)$$

Переходя в этом тождестве к комплексно сопряженным величинам, получаем (при $k\in\mathrm{N}$):

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left(e^{-ik\varphi}-e^{-ik\varphi_0}\right)=-i\left(e^{-ik\varphi}+2e^{-i(k-1)\varphi}e^{-i\varphi_0}+\ldots+2e^{-i\varphi}e^{-i(k-1)\varphi_0}+e^{-ik\varphi_0}\right).$$

Мы показали, что *при любом целом отрицательном k* имеет место тождество

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left(e^{ik\varphi}-e^{ik\varphi_0}\right)=-i\left(e^{ik\varphi}+2e^{i(k+1)\varphi}e^{-i\varphi_0}+\ldots+2e^{-i\varphi}e^{i(k+1)\varphi_0}+e^{ik\varphi_0}\right),\ k=-1,-2,\ldots \quad (2-)$$

Интегрируя тождества (2+) и (2–), находим окончательно

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}e^{ik\varphi}d\varphi=i\frac{|k|}{k}e^{ik\varphi_0},\ k=\pm1,\pm2,\ldots} \quad (3)$$

Пусть теперь $f_n(\varphi)$ – тригонометрический полином: $f_n(\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ik\varphi}$.

Используя (2) и (3), получаем

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f_n(\varphi)d\varphi=\sum_{\substack{k=-n\\k\neq0}}^{n}i\frac{|k|}{k}c_ke^{ik\varphi_0}} \quad (4)$$

Отметим, что *тригонометрический полином в правой части тождества* (4) *ортогонален к константам.*

Отделяя в тождестве (3) вещественную и мнимую части, имеем

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\cos k\varphi\, d\varphi=-\sin k\varphi_0,\ k=0,1,\ldots} \quad (5)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\sin k\varphi\, d\varphi=\cos k\varphi_0,\ k=1,2,\ldots} \quad (6)$$

и если тригонометрический полином (конечную тригонометрическую сумму) представить в виде

$$f_n(\varphi) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right)$$

то будем иметь

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\,\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\, f_n(\varphi)\,d\varphi = \sum_{k=1}^{n}\left(b_k \cos k\varphi_0 - a_k \sin k\varphi_0\right)} \qquad (7)$$

3. Переходя к выводу интерполяционных квадратурных формул рассмотрим сначала конкретный тригонометрический многочлен порядка точно n:

$$S_n(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi\right) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\varphi}\,, \qquad (8)$$

(здесь произведена «нормировка на единицу в нуле»).

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, находим

$$S_n(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\,\frac{e^{in\varphi}e^{i\varphi} - e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{1}{2n+1}\,\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}}\,,$$

откуда окончательно получаем

$$S_n(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Поскольку на интервале (0,2π) $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, нули тригонометрического полинома $S_n(\varphi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$ находим из тригонометрического уравнения $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = 0$.

Обозначим *равноотстоящие «узлы»*

$$\boxed{\varphi_k = \frac{2\pi k}{2n+1},\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (9)$$

имеем $S_n(\varphi_k) = 0, k = 1,...,2n$ и учитывая, что $S_n(0) = 1$, окончательно получаем

$$S_n(\varphi_k) = \delta_{0k}, \quad k = 0,1,...,2n \qquad (10)$$

Поскольку $S_n(\varphi+2\pi)=S_n(\varphi)$, $\varphi\in R$, то при любом $m\in Z$ $S_n(\varphi_{k+(2n+1)m})=S_n(\varphi_k)=0$, так что точки $\varphi_{k+(2n+1)m}$ при различных целых m (и фиксированных n и k) будем отождествлять.

Далее введём в рассмотрение 2n+1 *фундаментальных тригонометрических полиномов* порядка точно n, построенных по специальным наборам значений в *равноотстоящих узлах* интервала $[0,2\pi)$:

$$S_{n,k}(\varphi)\equiv S_n(\varphi-\varphi_k),\quad k=0,1,...,2n, \tag{11}$$

в явном виде

$$S_{n,k}(\varphi)=\frac{1}{2n+1}\sum_{p=-n}^{n}e^{ip(\varphi-\varphi_k)}. \tag{12}$$

С учётом (10) имеем

$$S_{n,k}(\varphi_q)=\delta_{kq},\quad k,q=0,1,...,2n. \tag{13}$$

Покажем, что (вещественнозначные) фундаментальные тригонометрические многочлены $S_{n,k}(\varphi)$, $k=0,1,...,2n$ образуют ортогональный базис в (2n+1)–мерном *пространстве тригонометрических многочленов порядка n со скалярным произведением* $(f_n,g_n)\equiv\int_0^{2\pi}f_n(\varphi)\overline{g_n(\varphi)}\,d\varphi$.

Действительно, подставляя в эту формулу явные выражения для фундаментальных тригонометрических полиномов, получаем

$$(S_{n,k},S_{n,l})=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2n+1}\sum_{p=0}^{2n}e^{ip(\varphi-\varphi_k^n)}\frac{1}{2n+1}\sum_{q=-n}^{n}e^{iq(\varphi-\varphi_l^n)}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{p=0}^{2n}\sum_{q=0}^{2n}e^{-i(p\varphi_k^n+q\varphi_l^n)}\int_0^{2\pi}e^{i(p+q)\varphi}d\varphi.$$

И поскольку $\int_0^{2\pi}e^{i(p+q)\varphi}d\varphi=0$ при $p+q\neq 0$, а из (9) при $p+q=0$ имеем $p\varphi_k+q\varphi_l=q\dfrac{2\pi(l-k)}{2n+1}$, находим

$$(S_{n,k},S_{n,l})=\frac{2\pi}{(2n+1)^2}\sum_{q=-n}^{n}e^{iq\frac{2\pi(k-l)}{2n+1}}=$$

$$=\frac{2\pi}{(2n+1)^2}\frac{e^{i(n+1)\frac{2\pi(k-l)}{2n+1}}-e^{-in\frac{2\pi(k-l)}{2n+1}}}{e^{i\frac{2\pi(k-l)}{2n+1}}-1}=\frac{2\pi}{(2n+1)^2}\frac{\sin\pi(k-l)}{\sin\frac{\pi(k-l)}{2n+1}},\quad k,l=0,1,...,2n.$$

Т.к. $|k-l| \le 2n$, то при $k \ne l$ $\sin\frac{\pi(k-l)}{2n+1} \ne 0$ и окончательно получаем

$$(S_{n,k}, S_{n,l}) = 0,\quad k \ne l; k,l = 0,1,...,2n \tag{14}$$

что и т.д.

При $k = l$ находим квадрат *нормы* фундаментального тригонометрического полинома:

$$\left\|S_{n,k}\right\|^2 = (S_{n,k}, S_{n,k}) = \frac{2\pi}{2n+1}, k = 0,1,...,2n. \tag{15}$$

Далее, используя полученные в этом пункте результаты, введём интерполяционный тригонометрический полином по системе равноотстоящих 2n+1 узлов и выведем точные интерполяционные квадратурные формулы для тригонометрического многочлена порядка n и произведения двух таких многочленов.

4. *Интерполяционный тригонометрический полином 2π –периодической функции* $y = f(\varphi)$ *с равноотстоящими узлами* $\varphi_k = \frac{2\pi}{2n+1}k$, $k = 0,1,...,2n$ (в дальнейшем – просто *интерполяционный тригонометрический полином)* *обозначим* $(P_n^{(1)} f)(\varphi)$:

$$(P_n^{(1)} f)(\varphi_k) = f(\varphi_k),\quad k = 0,1,...,2n \tag{16}$$

Легко показать что для тригонометрического многочлена $f_n(\varphi)$ порядка n имеет место тождество

$$\boxed{(P_n^{(1)} f_n)(\varphi) = f_n(\varphi), \varphi \in R} \tag{17}$$

Фундаментальные тригонометрические полиномы $S_{n,k}(\varphi)$, $k = 0,1,...,2n$, введенные выше, суть интерполяционные тригонометрические полиномы с «таблицами значений» (13).

Используя фундаментальные тригонометрические полиномы порядка n, построим интерполяционный тригонометрический полином 2π-периодической функции $y = f(\varphi)$:

$$\boxed{(P_n^{(1)}f)(\varphi) = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)S_{n,k}(\varphi)}. \tag{18}$$

В самом деле, используя (13), находим

$$\sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)S_{n,k}(\varphi_m) = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)\delta_{km} = f(\varphi_m)$$

5. *Интерполяционная квадратурная формула с равноотстоящими узлами* для интеграла $\int_0^{2\pi}(P_n^{(1)}f)(\varphi)d\varphi$ получается следующим образом.

Используя определение интерполяционного тригонометрического полинома (18), имеем

$$\int_0^{2\pi}(P_n^{(1)}f)(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)\int_0^{2\pi} S_{n,k}(\varphi)d\varphi .$$

Вычислим интегралы в правой части этого равенства, используя представление (8):

$$\int_0^{2\pi} S_{n,k}(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} S_n(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2n+1}\sum_{p=-n}^{n}\int_0^{2\pi} e^{ip\varphi}d\varphi = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad k=0,1,\dots,2n$$

Окончательно получаем *интерполяционную тригонометрическую квадратурную формулу с 2n+1 равноотстоящими узлами*

$$\boxed{\int_0^{2\pi}(P_n^{(1)}f)(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)\frac{2\pi}{2n+1}} \tag{19}$$

Особо отметим, что квадратурная формула (19) *точна* для тригонометрических полиномов $f_n(\varphi)$ порядка n, в силу (17), имеем

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f_n(\varphi_k)\frac{2\pi}{2n+1}} \tag{20}$$

Покажем что интерполяционная квадратурная формула с 2n+1 равноотстоящими узлами точна и для произведения двух тригонометрических полиномов порядка n.

Именно для 2π-периодических функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ имеет место тождество

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\left(P_n^{(1)}(fg)\right)(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi}(P_n^{(1)}f)(\varphi)(P_n^{(1)}g)(\varphi)d\varphi} \qquad (21)$$

для доказательства которого преобразуем правую часть:

$$\int_0^{2\pi}(P_n^{(1)}f)(\varphi)(P_n^{(1)}g)(\varphi)d\varphi = \sum_{p=0}^{2n}\sum_{q=0}^{2n} f(\varphi_p)g(\varphi_q)\int_0^{2\pi} S_{n,p}(\varphi)S_{n,q}(\varphi)d\varphi \overset{*)}{=}$$

$$= \sum_{p=0}^{2n}\sum_{q=0}^{2n} f(\varphi_p)g(\varphi_q)\frac{2\pi}{2n+1}\delta_{pq} \overset{**)}{=} \sum_{p=0}^{2n} f(\varphi_p^n)g(\varphi_p^n)\frac{2\pi}{2n+1} = \int_0^{2\pi}\left(P_n^{(1)}(fg)\right)(\varphi)d\varphi,$$

что и т.д.

Если $f_n(\varphi)$ и $g_n(\varphi)$ тригонометрические полиномы степени n, то используя (17), имеем $(P_n^{(1)}f_n)(\varphi) \equiv f_n(\varphi)$, $(P_n^{(1)}g_n)(\varphi) \equiv g_n(\varphi)$ и из (21) получаем тождество

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f_n(\varphi)g_n(\varphi)d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} f_n(\varphi_k)g_n(\varphi_k)\frac{2\pi}{2n+1}} \qquad (22)$$

6. В заключение докажем *квадратурную формулу интерполяционного типа для интеграла с ядром котангенс*

$$(Hf)(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2} f(\varphi)d\varphi \qquad (23)$$

используя, доказанное в пункте 2, тождество

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left(e^{ik\varphi}-e^{ik\varphi_0}\right) \equiv \pm i\left(e^{ik\varphi}+2e^{\pm i(|k|-1)\varphi}e^{\pm i\varphi_0}+\dots+2e^{\pm i\varphi}e^{\pm i(|k|-1)\varphi_0}+e^{ik\varphi_0}\right) \qquad (24)$$

$$k=\pm 1,\pm 2,\dots$$

Вот как это делается.

Для тригонометрического полинома $f_n(\varphi)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}$ в силу (24) имеем тождество

---

* Используется представление вида (18).

** Использованы соотношения ортогональности (14) и выражения для квадрата нормы (15).

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[f_n(\varphi)-f_n(\varphi_0)\right]\equiv\sum_{k=-n}^{n}c_k ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[e^{ik\varphi}-e^{ik\varphi_0}\right]\equiv$$

$$\equiv\sum_{\substack{k=-n\\k\neq0}}^{n}\pm ic_k\left(e^{ik\varphi}+2e^{\pm i(|k|-1)\varphi}e^{\pm i\varphi_0}+\ldots+2e^{\pm i\varphi}e^{\pm i(|k|-1)\varphi_0}+e^{ik\varphi_0}\right),$$

таким образом, мы убедились, что произведение

$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\left[f_n(\varphi)-f_n(\varphi_0)\right]$ – тригонометрический полином степени *n*. Поэтому интеграл от него по отрезку [0,2π] может быть вычислен по квадратурной формуле (20), а, учитывая представление (1) получаем такую квадратурную формулу с *(2n+1)* равноотстоящими узлами

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f_n(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2}\left[f_n(\varphi_k^n)-f_n(\varphi_0)\right]\frac{1}{2n+1}, \qquad (25)$$

где $\varphi_k^n=\frac{2\pi k}{2n+1}$, $\varphi_0\in\{\varphi_k^n\}$.

Если же $\varphi_0\notin\{\varphi_k^n\}_{k\in}$ то (25) перепишем в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f_n(\varphi)d\varphi=\sum_{k=0}^{2n}ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2}f_n(\varphi_k^n)\frac{1}{2n+1}+\frac{f_n(\varphi_0)}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}ctg\frac{\varphi_0-\varphi_k^n}{2}$$

и преобразуем последнюю сумму в правой части.

Замечая, что нули многочлена $z^{2n+1}-e^{-i(2n+1)\varphi_0}$ суть

$z_k=e^{i(\varphi_k^n-\varphi_0)}, k=0,1,\ldots,2n$, разложим его на множители:

$$z^{2n+1}-e^{-i(2n+1)\varphi_0}=\prod_{k=0}^{2n}\left(z-e^{i(\varphi_k^n-\varphi_0)}\right),$$

и поскольку $\left|1-e^{i\alpha}\right|=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$, получаем $\left|\sin\frac{2n+1}{2}\varphi_0\right|=2^{2n}\prod_{k=0}^{2n}\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi_k^n}{2}\right|$.

Логарифмируя, а затем, дифференцируя обе части этого тождества, находим

$$\sum_{k=0}^{2n}ctg\frac{\varphi_0-\varphi_k^n}{2}=(2n+1)ctg\frac{2n+1}{2}\varphi_0.$$

Окончательно (25) при $\varphi_0\notin\{\varphi_k^n\}_{k\in}$ запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2} f_n(\varphi)\,d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2} f_n(\varphi_k^n)\frac{1}{2n+1} + f_n(\varphi_0)\,ctg\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_0, \qquad (26)$$

и множитель при $f_n(\varphi_0)$ обращается в нуль, если φ_0 – корень тригонометрического уравнения $ctg\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_0 = 0$.

Эти корни суть $\varphi_{0j}^n = \frac{2j+1}{2n+1}\pi,\ j\in \mathbb{Z}$

Теперь, наряду с системой узлов $\{\varphi_k^n\}_{k=0}^{2n} \subset [0,2\pi)$, введем еще одну систему точек $\{\varphi_{0j}^n\}_{j=0}^{2n} \subset [0,2\pi)$

$$\varphi_{0j} = \frac{2j+1}{2n+1}\pi \quad j = 0,1,...,2n \qquad (27)$$

и будем рассматривать (26) только в точках этой системы.

На единичной окружности точки с естественными координатами φ_{0j}, нижние индексы *j,* которых отличаются на целое кратное 2*n+1*

$$\varphi_{0j+(2n+1)m}^n - \varphi_{0j}^n = 2\pi m, m\in \mathbb{Z} \qquad (28)$$

совпадают, и мы будем их отождествлять.

Имеем такую квадратурную формулу в *(2n+1)* точках

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_{0j}}{2} f_n(\varphi)\,d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} ctg\frac{\varphi_k-\varphi_{0j}}{2} f_n(\varphi_k)\frac{1}{2n+1},\ j=0,1,\ldots,2n} \qquad (29)$$

Эта квадратурная формула играет решающую роль при дискретизации «методом дискретных особенностей» сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта.

Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков –Херсон: ООО «Айлант», 2000.–90с.

Резюме. Запропоновані елементарні доведення дій оператора Гільберта на базис простору тригонометричних поліномів і квадратурної формули інтерполяційного типу для сингулярного інтегралу з ядром котангенс.

Summary. Elementary proofs of the Hilbert operator action to basis of trigonometrical polinoms spaces and quadrature formula interpolation type for singularity integral with kernel kotangent are proposed.

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Е.И.Скафа, канд.пед.наук. доцент
Донецкий национальный университет

Основной идеей реформирования национальной школы Украины является гуманизация и демократизация учебно-воспитательного процесса, основа которых – развитие личности учащегося, его способностей, возможностей и интересов. Главное в новой парадигме образования – это ориентация на интересы личности, адекватные современным тенденциям развития общества. Образование – это прежде всего становление личности, с ее неповторимой индивидуальностью, духовностью и творчеством. То есть одной из главных задач образования является приобщение учащихся к творческой деятельности и развитие ее в процессе обучения математике.

Но последнее, как отмечает Г.И.Саранцев [1]: «... возможно осуществить только через включение в содержание образования различных эвристик и создание специальных условий для творчества ученика». Все это позволяет отнести проблему эвристик (классификация эвристик, формы включения их в содержание, соотношение логической и эвристической составляющих в обучении, обучение эвристикам и т.п.) к числу важных проблем методики обучения математике.

Достаточно серьезное изучение эвристики как общей методологии творчества и как системы частных приемов решения задач является необходимой компонентой системы образования и подготовки учителя математики.

В основе эвристического подхода лежит психология творческого мышления, процедура поиска, попытка формализации творческой деятельности.

Первые такие попытки относятся к глубокой древности. Созданием формализованных методов решения математических задач занимались древнегреческие математики Евклид, автор «Начал», Аполлоний из Перги и Аристей Старший. Они, в частности, разработали некоторые приемы анализа и синтеза.

Ряд эвристических приемов приписывают Платону. Как отмечал греческий математик Паппа Александрийский (Ш в. н.э),. написавший книгу под названием «Сокровищница анализа» (или «Искусство решать задачи») [2] : «То что называют эвристикой, можно кратко определить как особое собрание принципов предназначенное для тех, кто после изучения обычных «Начал» имеет желание научиться решать математические задачи».

Известны попытки создания стройной системы эвристических методов Рене Декарта (1596-1650г.) и Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716 г.). Они обратили внимание на тот факт, что в составе интеллектуальной деятельности человека есть истины, которые ум обнаруживает не на основе логического доказательства, рассуждения, а путем своеобразного непосредственного «интеллектуального видения». В незаконченной работе Р.Декарта «Правила для направления ума» изложен ряд эвристических правил, которые до сих пор представляют значительный интерес.

В дальнейшем вопросами формализации творческой деятельности интересовались Б.Больцано (1781-1848 г.), Г.Гельмгольц (1821-1894 г.), А.Пуанкаре (1854-1912 г.) и др. В их исследованиях показана необходимость раскрытия, наряду с логической структурой мышления, тех его компонентов, которые не могут быть сведены к доказательству и которые составляют важное звено эвристической деятельности.

Сложность проблематики, существующая объективно, но не всегда принимаемая во внимание, отсутствие широких экспериментальных возможностей, не позволили этой блестящей плеяде ученых дать стройное и систематическое изложение эвристических методов.

Естественно эвристические идеи проникли и в область педагогических исследований. Еще Ян Амос Коменский (1592-1671 г.) писал: «...людей следует учить главнейшим образом тому, ... чтоб они исследовали и познавали самые предметы, а не помнили только чужие наблюдения и объяснения» [3].

А.Дистервег (1790-1866 г.), выдающийся немецкий педагог, видел развивающие возможности эвристического метода обучения, стимулировавшего самодеятельность учащегося, что способствовало раскрытию истины путем собственного размышления и исследования. В 1835 г. в «Руководстве для немецкий учителей» [4] он писал: «Учи как можно меньше. Всякая метода плоха, если приучает учащихся к простой восприимчивости или пассивности, и хороша, если возбуждает в нем самодеятельность».

Однако, впервые более значительное обоснование эвристического метода встречается в работах Генри Амстронга, профессора химии в Центральном колледже в Сити. В 1889 г. вышла его книга «Эвристический метод» [5], где он отмечает, что эвристический метод ставит учащихся в положение исследователя и позволяет открывать научные факты, вместо того, чтобы только слышать о них...

Начало применения эвристического метода как метода обучения математике рассматривается еще и в книге французского педагога-математика Лезана «Развитие математической инициативы» [6]. Не употребляя еще названия «эвристический метод» автор представляет его в виде советов учителю: основной принцип преподавания – «сохранять видимость игры, уважать свободу ребенка, поддерживать иллюзию его собственного открытия истины»; «избегать в первоначальном воспитании ребенка опасного искуса злоупотреблением упражнениями памяти, ибо это убивает его врожденные качества; обучать, опираясь на интерес к изучаемому».

На необходимость пересмотра традиционной программы обучения указывали и известные украинские педагоги-математики. В частности, С.И.Шохор-Троцкий (1853-1923 г.) в книге «Геометрия на задачах» писал, что нельзя излагать учащимся данный раздел математики в совершенно готовом виде. «...занятия геометрией могут быть для ученика занимательны только тогда, когда они требуют от него посильного и планомерного труда... требуют умственной работы, а не заучивания слов на память» [7].

Вопрос о связи интуитивного мышления и эвристических методов решения задач затрагивал в своих работах и известный педагог Дж.Брунер. В работе «Процесс обучения» [8] эвристические приемы характеризуются им как некоторые не вполне точные способы решения задач, с помощью которых можно иногда прийти к нужному результату. Имеется в виду использование аналогий, обследование ограниченного круга условий, наглядное выражение решения и т.д. Однако, рассматривая эвристики как приемы, помогающие решать задачу, Брунер не анализирует структуру эвристической деятельности как процесса обучения.

Особая заслуга в разработке эвристической деятельности как педагогической проблемы принадлежит американскому математику и педагогу Д.Пойа (1887-1985 г.). В книге «Как решать задачу» [2], он рассматривает эвристику как специальную отрасль знания. Цель эвристики – исследовать правила и методы, ведущие к открытиям и изобретениям. Пойа предлагает разрабатывать эвристику и раскрывать структуру творческого мыслительного процесса, используя личный опыт в решении задач и наблюдение за тем, как решают задачи другие люди. Задача педагога – помогать ученику самостоятельно решать задачи, навести ученика на самостоятельное открытие. Пойа формулирует общие правила, лежащие в основе поиска решений (они систематизированы в специальной таблице книги «Как решать задачу») и описывает на примерах структуру тех или иных конкретных эвристических приемов.

В дальнейшем проблеме реализации эвристических идей в обучении математике уделяли внимание такие математики и методисты как М.Я.Антоновский, Г.Д.Балк, Г.П.Бевз, М.И.Бурда, В.Г.Болтянский, Б.А.Викол, Б.В.Гниденко, С.Г.Губа, Г.Б.Дорофеев, Ю.М.Колягин, Ю.М.Кулюткин, Т.М.Миракова, А.Д.Мышкис, К.И.Нешков, Ю.А.Палант, Н.Х.Розов, З.И.Слепкань, Г.И.Саранцев, Е.Е.Семенов, А.Д.Семушин, Е.Н.Турецкий, Л.М.Фридман, Р.Г.Хазанкин, С.И.Шапиро, П.М.Эрдниев и др.

Список современных исследователей , занимающихся в той или иной степени анализом эвристических приемов, можно продолжать, но следует отметить, что рассматривая различные приемы обучения решению математических задач, доказательству теорем, формирования понятий на неалгоритмической основе, возникает проблема исследования творческой мыслительной деятельности. Как отмечает В.Н.Пушкин [9]: «...ядром эвристики, ее основой является психология творческого мышления». Поэтому несомненно важным этапом в рассмотрении методологической основы эвристики и эвристической деятельности является глубокий анализ психологической концепции деятельности, управления конкретной и реально протекающей деятельностью.

Подлинную же революцию в развитии эвристических методов и эвристической деятельности открыло использование ЭВМ. Быстродействие, гибкая логика, большая память – вот неполный перечень тех качеств ЭВМ, которые позволяют проводить широкий круг эвристических исследований.

Необходимость в изучении эвристик возникла в кибернетике тогда, когда обнаружилось, что многие задачи нерационально решать, а иногда и просто нельзя решить алгоритмическим путем. В одних случаях для решения задачи вообще не имеется алгоритма, а в других случаях он оказывается очень сложным и громоздким и предполагает перебор громадного числа возможных вариантов.

Естественно кибернетические идеи проникли и в область, связанную с преподаванием и обучением математике. Как отмечает Ю.Н.Кулюткин: «В настоящее время достаточно отчетливо определились два практических аспекта эвристики: *педагогический*, связанный с разработкой методов целенаправленного управления умственной деятельностью учащихся, и *кибернетический,* направленный на построение эвристических программ...» [10].

Одним из важных направлений модернизации школьного математического образования является широкое внедрение средств новых информационных технологий (НИТ) в процесс развития творческого мышления и прикладной значимости математики. Как отмечает М.И.Жалдак [11], использование НИТ позволяет сделать более наглядным и доступным понимание абстрактных математических объектов и методов, применить индивидуальный подход к обучению, усилить разработку и внедрение эвристических приемов обучения математике. Поэтому разработка и применение компьютерных обучающих программ на основе эвристических приемов построения их и задания в них дидактической системы организации эвристической деятельности обучаемых является важным элементом процесса обучения на современном этапе. При этом, мы придерживаемся определения эвристической деятельности по В.Н.Пушкину, как разновидности человеческого мышления, которая создает новую систему действий или открывает неизвестные ранее закономерности окружающих человека объектов [9].

Главное, что выделяет использование эвристического подхода и развития эвристической деятельности – это возможность раскрытия тайны вокруг процесса возникновения задачи, ее постановки, поисков решения, это использование приемов моделирования, как метода исследования, создание системы моделей, что несомненно способствует развитию интереса обучаемых, интуиции и математических способностей.

Однако, как отмечает Е.Е.Семенов [12]: «Работа по выявлению эвристик взвалена сейчас, как правило, на хрупкие плечи учеников. Естественно, с ней справляются лишь единицы «избранных». Остальные – мучаются, путаются, страдают, приобретая стойкое безразличие, а то и недоброжелательство, к математике, к учению вообще». Исправить такое положение, на наш взгляд, возможно за счет изменения состава задач учебников, последовательности изучения теорем, более активного перехода к эвристическим приемам в преподавании математики, создания систем задач и обучающих программ как дидактического способа формирования приемов эвристической деятельности и развития творческого мышления.

Нами рассматриваются вопросы, касающиеся использования в обучении специальных эвристико-дидактических конструкций, т.е. систем задач и компьютерных обучающих программ, которые в зависимости от содержания и направления запроектированной в них деятельности могут использоваться на разных этапах обучения [13 , 14].

Реализация этих идей отражена в сборнике научных работ «Эвристика и дидактика точных наук», который был основан в 1993 году в г.Донецке профессором Ю.А.Палантом.

Работы посвящены использованию эвристических приемов обучения, стимулированию творческой деятельности учащихся в области постановки и решении задач, в них рассматриваются новые подходы к некоторым вопросам методики обучения математике.

Основные направления развития эвристической деятельности исследуемые и разрабатываемые нами – это:

– *использование в обучении общих эвристик* (анализа, аналогии, индукции и др.) должно фигурировать на каждом этапе изучения курса математики, при этом для реализации их предлагаются такие приемы как «формулируй эквивалентную проблему», «думай на модели», «используй аналогию», «выбирай эффективную систему обозначения» и др.;
– *специальные эвристики* (например, метод перебора. принцип крайнего, инварианты и полуинварианты, принцип четности и т.д) полезны для работы при подготовке к олимпиадам, для работы в физико-математических классах;
– *специальные эвристико-дидактические конструкции* (системы задач и обучающих программ) могут использоваться как способ внедрения новых информационных технологий в обучение, как способ развития у обучаемых активности, сознательного подхода к выполнению заданий, выработке творческих умений.

Идеям построения эвристико-дидактических конструкций будет посвящена следующая наша публикация.

1. Саранцев Г.И.Методика обучения математике на рубеже веков // Математика в школе. – 2000. – №7. – С.2-5.
2. 2.. Пойа Д. Как решать задачу.- М.: Госпедиздат, 1959.
3. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения. Великая дидактика. – М.: Педагогика, 1982.
4. Дистервег А. Избранные педагогические сочинения. – М.: Госпедиздат, 1956.
5. Амстронг Г. Эвристический метод обучения. – М, 1900.
6. Лезан. Развитие математической инициативы. – М., 1908.
7. Шохор-Троцкий С.И. Геометрия на задачах. – М., 1908.
8. Брунер Дж. Процесс обучения. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.
9. Пушкин В.Н. Эвристика – наука о творческом мышлении. – М.: Политиздат, 1967.
10. Кулюткин Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений. – М.: Педагогика, 1970.
11. Жалдак М.І., Морзе Н.В. Основи нових інформаційних технологій навчання. – К., 1997.
12. Семенов Е.Е. Размышления об эвристиках // Математика в школе. – 1995. – № 5. – С.39-43.
13. Палант Ю.О., Хорольська О.В., Карлащук А.Ю. Евристичні лінії у шкільному компоненті / В сб. Евристика та дидактика точних наук. – Донецьк: ТЕАН, 1998. – Вип.9.
14. Скафа Е.И., Палант Ю.А. Эвристическая компонента в системе подготовки преподавателей математики / В сб. Эвристика и дидактика точных наук. – Донецк: ТЕАН, 1999. – Вып.10.

Резюме. В статті йдеться про нові підходи до формування творчої діяльності на основі використання евристичних прийомів у навчанні. Здійснений екскурс до історії проблеми та обґрунтована необхідність розвитку евристичної діяльності учнів.

Summary. New approach to form of creative activity on the basis of a use of heuristic reception in the training are propoused in the article. The excursus in a history of the problem is realized. The necessary of a development of a stuolents heuristic activity is justified.

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД В РАЗВИТИИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ

Н.Е.Ситникова, директор экспериментальной общеобразовательной школы I – III ступеней № 43, г. Донецк
А.А.Шумлянская, зав.лабораторией Научной организации учебного процесса,
Л.С.Чекарамит, канд. пед. наук, доцент, Донецкий национальный университет

Сегодня на Украине ощущается потребность не только в новых типах учебных заведений, но и в новой образовательной системе, способной воспитать человека нового типа. Уже сейчас в стране происходят серьезные изменения в технологической сфере, глубокие политические реформы, преобразования в духовной жизни. Следует также иметь в виду, что мир движется к открытым, высокоинтенсивным, коммуникативным системам образования, которые дают возможность каждому реализовать собственный интеллектуальный и личностный потенциал. Поэтому создание личностно-ориентированной модели обучения является актуальной задачей и требует не только изменения содержания образования, но и технологии образовательного процесса.

С 1996 г. преподаватели Донецкого национального университета совместно с учителями средней общеобразовательной школы №43 и учеными института экспериментальных систем образования работают над проблемой подготовки учителей к инновационной деятельности в школе. Программа совместной экспериментальной работы предполагает замену авторитарно-дисциплинарной модели обучения на личностно-ориентированную, главным принципом которой является всестороннее развитие учащихся. Модульно-развивающая система, разработанная профессором, доктором психологических наук А.В.Фурманом, отвечает принципам системной дифференциации, максимальной индивидуализации учебно-воспитательного процесса, построения его на паритетной, диалогической основе. Учитель в этой системе проходит дистанционную переподготовку по специальной программе как психолог-исследователь и проектирует программно-методическое обеспечение учебных курсов в школе на основе идей индивидуализации и развития личности ученика.

В этой системе педагог-психолог хорошо знает личность каждого учащегося и психолого-педагогический портрет классов, в которых он работает. Это стало возможным благодаря ежегодным комплексным, прогностическим социально-психологическим исследованиям школьников по 15 методикам, что позволило определить возможности каждого ученика, классного коллектива, школы в целом и квалифицированно организовать уровневую, возрастную, профильную дифференциацию.

Системная дифференциация означает дифференциацию целей, задач, содержания, технологий и результатов обучения. Поэтому в основе модульно-развивающей системы лежит учение о полном функциональном цикле учебного модуля, который содержит 7 основных этапов: установочно-мотивационный, содержательно-поисковый, оценочно-смысловой, адаптивно-преобразующий, системно-обобщающий, контрольно-рефлексивный, каждый из которых имеет свое задание, психолого-дидактическое содержание и развивает определенные стороны внутреннего мира личности.

При этом на отдельных этапах эвристический метод играет решающую роль, особенно на содержательно-поисковом и адаптивно-преобразующем.

Так, в 7 классе при изучении темы «Сумма углов треугольника» используются такие виды эвристического метода: метод целесообразных задач, т.е. система подготовительных упражнений, которая способствует осмыслению учащимися нового определения, готовит их к «открытию» теоремы, к пониманию ее доказательства, к самостоятельному решению задач. Организуя эвристическую беседу, учитель подводит учащихся к определенному выводу, учит постановке и решению учебных проблем.

Приводим пример варианта практического задания: измерить углы прямоугольного, остроугольного и тупоугольного треугольников, используя признак параллельности прямых, сформулировать и попытаться доказать свою гипотезу. При этом учащиеся сталкиваются с неизвестными явлениями, новыми задачами, возникает проблемная ситуация, требующая поисков путей овладения новыми знаниями и решения учебных проблем. На адаптивно-преобразующем этапе используются: составление инструкций, предметных алгоритмов, схем, обобщение способов решения задач.

При изучении темы «Решение неравенств II степени с одной переменной» (алгебра, 9 класс) учащимся предлагается составить алгоритм решения неравенств вида $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, где $f(x)$ – дробно-рациональное выражение. Такого вида работа требует различных логических операций: анализа и синтеза, сравнения и сопоставления фактов и явлений, установления в них сходства и различия, выделения основных и второстепенных признаков, раскрытие причинно-следственных связей и т.д. Чаще всего на занятиях ставятся нетрудоемкие задания, которые успевают решить все учащиеся класса с небольшой разницей во времени. Более трудоемкие – включаются в домашнее задание и в программу самореализации (ПСРу). ПСРу обладает признаками, характерными для всех программ:

- целевой банк действий (постановка целей, структурно-часовая модель);
- банк информации (алгоритм поиска, теоретические выкладки);
- методическое руководство по достижению поставленных целей, в том числе система работ по рефлексии, форма и объем выполняемых работ и др.)

ПСРу учитывает ряд факторов: возрастные особенности, предмет обучения, формы проведения занятий (этапы учебного модуля), формы «выхода» ученической работы. ПСРу рассчитана на раскрытие себя как неординарной личности, которая способна не только находить дополнительную информацию по справочникам, в периодической прессе, в монографиях, но и творчески переосмысливать эту информацию. Учебное пособие к

ПСРу целенаправленно учит творчески подходить к решению предложенных проблем, сознательно акцентирует внимание на осуществлении навыков продуктивной умственной деятельности, поэтому начинаются со слов: сопоставьте, проанализируйте, выделите главное, составьте систему доказательств, постройте схему, таблицу и т.д. Своеобразное решение ученика, даже если оно и ошибочно, оценивается как стремление поиска своего пути в решении проблемы. ПСРу нацеливает на исследовательскую деятельность, ставит ученика в условия «непройденных путей», где необходима оригинальность мышления. В ПСРу используют рисунки, схемы, таблицы, графики, алгоритмы, предлагается форма реализации заданий (сообщение, доклады, рефераты, инсценировки, экскурсии и т.д.), объем и время сообщения и т.д. Учитель обязан позаботиться о психо-эмоциональном состоянии ученика и создать особое взаимодействие с ним в форме обращений, поддержки и закрепления веры ученика в свои силы. ПСРу выбирается добровольно и ученик не получает низких или негативных оценок. Если сам ученик и педагог недовольны результатом исследований, то работа завершается сразу или остается на доработку на период, удобный для ученика, либо остается незавершенной.

ПСРу тесно связана с модульными занятиями. Программа нацелена на самоутверждение своего «Я», демонстрацию перед классным коллективом своих умений по решению нестандартных задач .

Предлагается ПСРу по математике для 10 класса.

Пояснительная записка

Программа самореализации разработана по курсу «Алгебра и начала анализа» для учащихся 10 класса с выше среднего и высоким интеллектуальным потенциалом по теме: «Производная в физике и технике» и рассчитана на углубленное изучение темы.

Цель программы – расширение области познания учащихся по теме, формирование творческих способностей как способа самоутверждения личности.

Задания способствуют развитию умений сопоставлять, наблюдать, проводить аналогии, устанавливать несложные математические закономерности, связи, развитию самостоятельного творческого мышления, активизируют все интеллектуальные процессы, позволяют пережить как муки творческого поиска, так и радость победы при нахождении верного решения.

Программа нацелена на развитие таких ценностей как трудолюбие, упорство в достижении цели, умение преодолевать трудности, рационально использовать рабочее время.

Задания дают возможность самореализоваться в принятом для каждого учащегося темпе, реализуют принцип индивидуализации обучения.

Результаты поисково-познавательной деятельности учащихся используются на содержательно-поисковом, адаптивно-преобразующем, системно-обобщающем этапах в виде сообщения, развивающего задания, обсуждения приобретенных знаний с товарищами.

Юный друг!

Обладать активными знаниями в области математики означает не только готовность приводить достаточно длинные списки математических фактов и умение строго воспроизводить доказательства некоторых из них. Активность математического знания – это стремление и способность все осмыслить: сопоставить отдельные факты, связать новое со старым, непривычное с обычным по аналогии, сложное разложить на части, найти применение общего правила к частному случаю, перейти от единичного факта к общей закономерности, создать целостное представление о математическом объекте. Активное математическое знание нельзя получить как-то извне, его необходимо выработать самому. Полезным и даже необходимым для развития математического мышления является самостоятельное решение задач.

Развивать эти качества помогут предложенные задания.

При выполнении этих заданий тебе необходимо использовать определение производной, правила дифференцирования, таблицу производных, механический смысл производной. Для их решений тебе понадобится умение анализировать, синтезировать, проводить аналогии, обобщать, делать выводы и обосновывать их.

Не огорчайся от маленьких неудач при достижении поставленной цели! Немного упорства и терпения – и все обязательно получится.

Искренне желаю тебе успеха!

Программа

самореализации личности учащегося

по курсу «Алгебра и начала анализа». 10 класс

Тема: «Производная. Производная в физике и технике».

Для изучения темы отводится 36 м-м структурно-часовой модели.

Этапы	У-М	С-П	О-С	А-П	С-О	К-Р
Кол-во мини-модулей	1	8	6	15	3	3

Этапы:

У-М – установочно-мотивационный

С-П – содержательно-поисковый

О-С – оценочно-смысловой

А-П – адаптивно-преобразующий

С-О – системно-обобщающий

К-Р – контрольно-рефлексивный

№ п/п	Вид задания	Дата выполнения
1 2 3 4 5		

Алгоритм поиска

Целевая установка	Задание № 1.	Рефлексия
Учимся работать с дополнительной литературой	Найди в справочной литературе сведения о происхождении понятия производной.	Выступи с сообщением на С-П этапе
Развиваем умение доказывать	Задание № 2. Выведите формулу производных обратных тригонометрических функций: $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $arctg' x = \frac{1}{1+x^2}$ $arcctg' x = -\frac{1}{1+x^2}$	Выступи с сообщением на С-О этапе Поделись своими выводами с товарищами на А-П
	Задание № 3. Отыщи в литературе различные способы вывода основных правил дифференцирования.	

  Используй знания в нестандартной ситуации	Задание № 4. Реши уравнение $f'(x) = 0$, где $a)\, f(x) = \frac{x^4}{4} + \ x^3 - x^2 - x$ б) $f(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} - x$	 Выступи с сообщением на С-О этапе Молодец! Ты уверенно шагаешь к достижению поставленной цели
	Задание № 5. Реши уравнение f (x) = 0, где f (x) = sin x – cos x – x	
Учимся выполнять задания с параметрами	Задание № 6. Реши уравнение $x^3 - ax - 5 = 0$, где $a = f'(1), \quad f'(u) = u^3 - 7u + 9$	Выступи на С-О
Углубляем знания по данной теме	Задание № 7. Реши задачу. Найдите точки, в которых скорость изменения функции y = 24 cos x + 37 больше скорости изменения функции y = 12x – 150.	Трудно? Интересно? Молодец! Ты приближаешься к финишу. Желаю тебе удачи!

	Задание № 8. а) Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг воды от 0^0 С до t^0 С определяется формулой $Q = t + 2^{*}10^{-5} t^2 + 3a^{*}10^{-7}t^3$. Теплоемкость воды при $t = 100^0$ С равна 1,013. Найдите значение параметра а. б) Для нагревания 1 кг жидкости от 0^0С до t^0С необходимо Q Дж теплоты, где $Q = 1.7t + at^2 + bt^3$. Известно, что теплоемкость жидкости при температуре 100^0 С равна 1,71 Дж/К, а для нагревания 1 кг этой жидкости от 0^0 С до 50^0 С требуется 85,025 Дж теплоты. Найдите значения а и b. Задание № 9. При деформации одна из сторон прямоугольника увеличивается с постоянной скоростью 1см/ч, а другая уменьшается со скоростью 0,5 см/ч. Найди скорость изменения площади прямоугольника через 45 минут после начала деформации, если известно, что в этот момент его площадь равна 20 $см^2$, а первоначальная площадь прямоугольника 17 $см^2$. ***Напиши коротко о том, какие чувства ты испытывал, работая над программой. Понравившиеся задания оцени !, трудные ?, ненужные – .*** ***Оцени свою работу*** О ***Сопоставь свою оценку с оценкой учителя*** О	Подготовь решения заданий № 7-9 к К-Р

Резюме. На підставі результатів спільного експерименту Інституту експериментальних систем освіти і Донецького національного університету в загальноосвітній школі №43 м.Донецька розроблена особистісно-орієнтована модель навчання, провідна роль якої належить евристичному методу.

У статті висвітлюються теоретичні і практичні аспекти інноваційної системи навчання і підходи до створення програм самореалізації особистості учня.

Summary. On the basis of the results of the pedagogical experiment of the Institute of Experimental systems of education and Donetsk National University in school № 43 in Donetsk person-oriented model of teaching has been developed. Its leading part belongs to the heuristics method.

Theoretical and practical aspects of the innovating system of teaching and approaches to the creation of the programmers on self-realization of the pupils individuality.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ З ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Г.М.Литвиненко, канд.пед.наук., доцент,
зав.відділом науково-методичного центру середньої освіти
Міністерства освіти і науки України, м.Київ

Реформування загальної середньої освіти відповідно до Закону України «Про загальну середню освіту» і перехід від традиційних випускних екзаменів до державної атестації учнів середніх загальносвітніх навчальних закладів потребують розробки нових форм і методів контролю та сучасної системи оцінювання навчальних досягнень учнів. Їх складовими є засвоєння змісту навчального матеріалу та сформованість умінь і навичок застосовувати набуті знання у процесі розв'язування задач і вправ. Вони неоднорідні і мають різнорівневий характер [2]:

I – початковий (*рецептивний*): учень в результаті вивчення навчального матеріалу *може назвати математичний об'єкт* (вираз, формулу, геометричну фігуру, символ), але тільки в тому випадку, коли цей об'єкт (його зображення, опис, характеристика) запропонований йому безпосередньо.

На цьому рівні учень може:

1) ***впізнати*** і ствердно відповісти на запитання, чи є пред'явлений йому об'єкт тим, про який йде мова. Так, він може сказати, що показана йому модель геометричної фігури справді є конусом або заперечити це;

2) ***розпізнати*** з-поміж інших, математичних об'єктів (їх зображень, характеристик) той, про який йдеться у запитанні або завданні. Наприклад, серед формул, якими задано лінійну, квадратичну, логарифмічну і показникову функції, він знаходить показникову;

3) ***співвіднести*** показані (або описані) математичні об'єкти з названими їх характеристиками або властивостями.

II – середній (*відтворення або репродуктивний)*: учень *може відтворити* (повторити) інформацію, операції, дії, засвоєні ним у процесі навчання.

На цьому рівні розрізняють ***відтворення***:

1) ***буквальне*** (дослівне), коли учень відтворює інформацію, операцію, дію в тому вигляді і в тій послідовності, як вони були представлені в процесі навчання або в підручнику;

2) ***реконструктивне,*** коли учень у процесі відповіді допускає окремі видозміни навчальної інформації, наводить власні приклади.

III – достатній *(продуктивний)*: учень *вміє виконувати математичні операції*, загальна методика і послідовність (алгоритм) яких йому знайомі, але зміст та умови виконання змінені.

IV – високий (*творчий*): учень здатний самостійно орієнтуватися в нових для нього ситуаціях, складати план дій і виконати його, пропонувати нові, невідомі йому раніше розв'зки, тобто його навчальна діяльність носить *дослідницький* характер.

Розрізняють два основні види творчої діяльності:

1) ***розв'язання заданої проблеми***, тобто задача, яка потребує нестандартного підходу до її розв'язання;

2) ***постановка проблеми та її розв'язання***, тобто складання нових математичних задач, аналіз, співставлення, пошук найбільш раціональних способів розв'язування однієї і тієї ж задачі.

Навчальна діяльність, як і будь-яка інша, включає три види дій : ***орієнтувальні, виконавчі та контролюючі***. Під час ***орієнтувальних дій*** учні аналізують навчальну інформацію (задачу, вправу), вивчають умови поставлених перед ними завдань, шукають шляхи і засоби, послідовність, тобто складають план їх реалізації.

Виконавчі дії – це виконання учнями плану, складеного в результаті орієнтувальних дій, в процесі чого учні усвідомлюють і засвоюють навчальні елементи, набувають досвіду з тим, щоб використати його в подальшій навчальній роботі, практичній діяльності та повсякденному житті.

За допомогою ***контролюючих дій*** учні оцінюють правильність та якість виконання орієнтувальних і виконавчих дій, при потребі вносять корективи до плану виконавчих та помилково виконаних дій.

Засвоєння навчального матеріалу і формування навчальної діяльності учнів підпорядковане ***принципу ієрархії рівнів***, коли учень не може вийти на новий, не оволодівши навчальними елементами (діями) на попередньому рівні.

Оцінювання якості математичної підготовки учнів з математики здійснюється в двох аспектах: ***рівень володіння теоретичними знаннями*** та ***якість практичних умінь і навичок***, які можна виявити у процесі усного опитування, і проведення письмових робіт, тестування. Тому критерії оцінювання мають бути сформульовані окремо для оцінки усних відповідей та для перевірки письмових робіт і тестування.

Запропонована 12-бальна шкала оцінок навчальних досягнень учнів з математики, на відміну від діючої дає змогу, не вдаючись до додаткових засобів, мати досить повне уявлення про рівень засвоєння учнями навчального матеріалу та сформованості у них навчальної діяльності. Усі оцінки

12-бальної шкали є перевідними і випускними, що має посилити мотивацію навчання і створює психологічний комфорт для учнів, а також забезпечити під час атестації самостійність школярів.

В цих умовах змінюються роль і значення поточного опитування, поточних і підсумкових оцінок.

І. Оцінювання усних відповідей

Усна відповідь може складатися:

1) із викладу теоретичного матеріалу, доведення теорем, обгрунтування властивостей математичних об'єктів;

2) розв'язування задач і вправ з усними поясненнями.

Рівні засвоєння (діяльності)	***Бали***	**Критерії оцінки рівня засвоєння (діяльності)**
І-*рівень*	1	Учень може: - розпізнати один з кількох математичних об'єктів (символів, виразів, геометричних фігур тощо), виділивши його серед інших; - прочитати і записати числа, переписати даний математичний вираз, формулу; - зобразити найпростіші геометричні фігури (намалювати ескіз)
	2	Учень може: - виконати однокрокові дії з числами, найпростішими математичними виразами; - впізнати окремі математичні об'єкти і пояснити свій вибір
	3	Учень може: – співвіднести дані або словесно описані математичні об'єкти за їх суттєвими властивостями; - за допомогою вчителя виконувати елементарні завдання.

II-*рівень*	4	Учень може: - відтворити означення математичних понять і формулювання тверджень; - назвати елементи математичних об'єктів;. - Формулювати деякі властивості математичних об'єктів; - виконувати за зразком елементарні завдання
	5	Учень може: - ілюструвати означення математичних понять, формулювання теорем і правил виконання математичних дій прикладами із пояснень учителя або підручника; - розв'язати завдання (до трьох логічних кроків) за відомим алгоритмом;
	6	Учень може: - ілюструвати означення математичних понять і правил виконання математичних дій власними прикладами; – самостійно розв'язати і пояснити розв'язання завдання (до трьох логічних кроків); – записати математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки
III-*рівень*	7	Учень: - може застосовувати означення математичних понять та їх властивостей для розв'язування завдань у знайомих ситуаціях; - знає залежності між елементами математичних об'єктів; - самостійно виправляє вказані йому помилки; – розв'язує завдання, передбачені програмою без достатніх пояснень
	8	Учень: - володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; - розв'язує завдання, передбачені програмою, з частковим поясненням; - частково аргументує математичні міркування й розв'язування завдань.

	9	Учень: - вільно володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; - самостійно виконує завдання в знайомих ситуаціях; - - виправляє допущені помилки; - -повністю аргументує обгрунтування метематичних тверджень; - -розв'язує завдання з достатгнім поясненням.
IV-*рівень*	10	Знання, уміння і навички учня повністю відповідають вимогам програм, зокрема учень: - може усвідомити нові математичні факти, ідеї; - під керівництвом учителя знаходить джерела інформації та самостійно використовує їх; - розв'язує завдання з повним поясненням і обгрунтуванням
	11	Учень: - може вільно і правильно висловити власні відповідні математичні міркування, переконливо аргументувати їх; - самостійно знаходити джерела інформації та самостійно працює з ними; - може використовувати набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях; - знає передбачені програмою основні методи розв'язування завдань і вміє їх застосовувати з необхідними обгрунтуваннями
	12	Учень: - виявляє варіативність мислення і раціональність; особливі творчі здібності, самостійно розвиває власні обдарування і нахили на основі глибоких і міцних знань, вміє самостійно здобувати знання та доводити теореми, властивості, може самостійно пояснити розв'язування будь-якого завдання підвищеного рівня

ІІ. Оцінювання письмових робіт

Письмова робота *може складатися* із завдань *обов'язкового і підвищеного або з підвищеного рівня*.

Основний рівень – це задачі і вправи на 2-3 логічних кроки *рецептивно-репродуктивного* характеру на безпосереднє застосування набутих знань, тобто для їх розв’язання достатньо формальних знань правил, означень, теорем та ознак, формул, передбачених навчальними програмами, вмінь виконувати найпростіші математичні операції (спрощення, тотожні перетворення виразів, обчислення, в тому числі за даними формулами) та реалізувати залежності між елементами геометричних фігур..

Повне розв'язання такого завдання оцінюється 2 балами.

Підвищений рівень – це задачі і вправи на 4-6 логічних кроки *конструктивного характеру*, розв'язання яких потребує практичного застосування набутих знань з обгрунтуванням процесу міркувань.

Повне розв'язання кожного з них оцінюється 4 балами.

З огляду на 12-бальну шкалу оцінювання обсяг письмової роботи може бути таким:

1) 6 завдань обов'язкового рівня;
2) 4 завдання обов'язкового і 1 підвищеного рівня;
3) 2 завдання обов'язкового і 2 підвищеного рівнів;
4) 3 завдання підвищеного рівня.

Оптимальним є перший варіант, оскільки містить близько 70 відсотків завдань обов'язкових результатів навчання. Перший і третій варіанти складаються із завдань одного рівня, тому вони можуть використовуватися відповідно для тестування, зрозуміло, із значним збільшенням вправ, та для виявлення здібних і обдарованих учнів з математики для навчання їх у спеціалізованих і профільних класах.

У процесі проведення письмових екзаменів та контрольних робіт з математики у попередні роки за різнорівневими збірниками завдань та їх використання для поточного контролю [5-10] склалися ***дві основні форми*** оцінювання письмових робіт.

Перша з них полягає в тому, що ***розв'язування задачі або вправи розбивається на окремі логічні кроки і операції, кожному з яких залежно від їх складності та значимості присвоюється певна кількість балів або їх частка.***

Розглянемо конкретні приклади з окремих курсів математики, що дають уявлення про методику такого оцінювання.

Математика [10].

1.Для знаходження найменшого спільного кратного двох чисел [№3] учень має реалізувати два логічних кроки: розкласти їх на прості множники, знайти найменше спільне кратне (НСК). Кожен з них містить по дві операції. У першому випадку треба розкласти на множники два числа, у другому – записати відповідний добуток та обчислити його. За складністю і значимістю вони практично однакові, тому кожен оцінюється по 0,5 бала. Щоб розкласти кожне число на множники, треба виконати по 5 дій, тому кожна з них може бути оцінена по 0,1 бала.

2. При розв'язуванні текстової задачі [№792] необхідно встановити співвідношення між даними і шуканими величинами, скласти рівняння, розв'язати його та зробити висновок щодо відповіді. Тут маємо чотири логічні кроки, різні за своєю значимістю, тому кожен оцінюється від 0,5 до 2,0 бала.

Алгебра, алгебра і початки аналізу

1. Для розв'язування № 28 (а) [6,9] треба: 1) знайти суму виразів у дужках: 2) записати добуток виразів у вигляді дробу: 3) скоротити утворений дріб); 4) дотриматись порядку дій.

Таким чином маємо 4 логічні кроки. Кожен з них практично рівноцінний, тому правильна їх реалізація оцінюється по 0,5 бала.

2. Щоб розв'язати логарифмічну нерівність №690,б [5,8] необхідно: 1) записати систему нерівностей, що випливає з даної нерівності та властивостей логарифмічної функції; 2) розв'язати утворену систему; 3) записати відповідь.

Отже, маємо 3 логічні кроки (етапи), з яких перший і третій оцінюємо по 1 балу, а другий, який є достатньо складним, – 2 балами. Другий логічний крок можна розбити ще на дві частини: 1) спрощення дробових виразів, які містить система нерівностей та 2) їх заміна відповідними добутками лінійних множників. Кожна з цих частин може бути оцінена по 1 балу.

Геометрія

1. Задачу № 151 (б) [5,8] учень може розв'язати таким чином: 1) встановлює, що трикутник, утворений хордою, яка стягує дугу 60^0, і двома радіусами кола, – рівносторонній; 2) за означенням рівностороннього трикутника робить висновок, що радіус як його сторона дорівнює 10 см.

Тут 2 логічні кроки, кожен з яких оцінюється по 1 балу.

2. Задача № 570 (а) [5] розв'язується так: 1) зображають конус з даним радіусом і кутами, під якими видно хорду з центра основи і вершини конуса; 2) з трикутника, утвореного хордою і двома радіусами кола основи конуса знаходять хорду; 3) з трикутника, сторонами якого є хорда кола основи і твірні конуса, визначають твірну; 4) знаходять бічну і повну поверхню конуса,

Маємо 4 логічні кроки, з яких перший і другий оцінюємо по 1 балу. Окремі операції четвертого кроку можна оцінити по 0,5 бала.

Аналогічним чином можна оцінити виконання інших задач курсу математики. При такій системі оцінювання кожного елемента знань (логічного кроку, операції) здійснюється незалежно від правильності виконання інших логічних кроків або математичних операцій.

Для зручності підрахунків можна *скласти відповідну таблицю* з логічними кроками і операціями (елементами знань) та їх оцінками в балах, яка дасть можливість, крім усього, глибше проаналізувати якість засвоєння школярами знань, рівень оволодіння ними вміннями, практичними навичками.

Оцінка за роботу *– це сума балів за окремо виконані завдання.* При цьому користуються звичним правилом округлення чисел.

Друга форма оцінювання письмової роботи – ***із вживанням термінів «плюс-мінус»***, як це робилося впродовж останніх років у загальноосвітніх навчальних закладах України на екзаменах за курс старшої школи [5].

Суть її полягає в тому, що оцінювання має *інтегрований характер* і проводиться в *два етапи*.

На ***першому етапі*** за виконання окремих завдань письмової роботи умовно виставляється:

«+» *(плюс)* за повне розв'язання учнем завдання;

«±» *(плюс-мінус),* коли хід розв'язування завдання правильний, але допущені помилки логічного або обчислювального характеру призвели до неправильної відповіді;

«∓« (*мінус-плюс),* коли завдання не закінчено, але учень суттєво наблизився до повного розв'язування, виконавши не менше його половини;

«–» *(мінус),* коли учень лише розпочав розв'язування, в тому числі зробив малюнок, записав фрагмент розв'язання тощо.

На ***другому етапі*** умовні оцінки у термінах «*плюс-мінус*» переводяться у бали за такою шкалою:

Рівні складності завдань	Плюси-мінуси, їх еквівалент (у балах)			
	+	±	∓	-
І. Обов'язковий	2,0	1,5	1,0	0,5
ІІ. Підвищений	4,0	3,0	2,0	1,0

Оцінка роботи – це, як і в першому випадку, сума балів, отриманих учнем за виконання кожного завдання окремо з відповідним округленням числа.

Можлива ще ***одна форма*** оцінювання навчальних досягнень з математики – ***тестування.*** Посібники [5, 6, 8,9], що використовувалися на випускних екзаменах в 9-их та 11-их класах, на обов'язковому рівні містять тестові завдання з основних тем шкільного курсу математики основної і старшої школи. Тому вчитель при потребі може скористатися ним під час атестації та проведення заліків з окремих тем курсів.

Можна запропонувати кількість завдань, які складають середній тест. У цьому випадку результати за відповідним коефіцієнтом переводять у 12-бальну або іншу шкалу, яка використовується для оцінки знань. Так, тема «Площі фігур» посібника [6,9] містить 27 задач (№№ 163-189), тому при включенні всіх їх до тесту коефіцієнт для 12-бальної шкали становитиме 2,25. У темі «Дійсні числа» посібника [5,8] є 48 задач (№№1-48), тому коефіцієнт становитиме 4. Кількість завдань тесту доцільно обмежувати числом, кратним 12

Якість виконання тестів (якщо перевірялися обов'язкові результати навчання) слід оцінювати за 2-бальною ***дихотомічною*** (альтернативною) ***шкалою*** типу: «***зараховано – не зараховано***» за умови, що учень дав 70 відсотків правильніх відповідей. За таких умов, як довели психологи, учень зможе в подальшому успішно поповнювати свої знання, розвивати вміння і навчики і з часом повністю засвоїти суспільно необхідній мінімум знань з математики. В інших випадках можливе переведення результатів тестування у 12-бальну шкалу оцінювання навчальних досягнень.

Стаття не вичерпує всіх можливих підходів до оцінювання письмових робіт з математики за 12-бальною шкалою. До того, ж пропоновані форми оцінювання мають свої переваги і недоліки. Тому потрібні подальші пошуки оптимального його варіанту, який адекватно відображав би навчальні досягнення учнів з математики на різних рівнях навчання.

1. Балл Г.О. У світі задач. – К.: Знання, 1986. – 44 с.
2. Ерецкий М.И., Пороцкий Э.С. Проверка знаний, умений и навыков: Учеб. пособие. – М.: Высш.школа, 1978. – 175 с.

3. Бурда М.І., Литивненко Г,М., Собко М.С..Математика. Завдання для тестової перевірки знань, умінь і навичок випускників загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій. Частина І. – К.: Абрис, 1993. – 98 с.
4. Бурда М.І., Литивненко Г,М., Собко М.С.. Математика. Завдання для тестової перевірки знань, умінь і навичок випускників загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій. Частина ІІ. – К.: Абрис, 1993. – 30 с.
5. Литвиненко Г.М.,Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10-11 класів. Частина І. Алгебра і початки аналізу. Частина ІІ. Геометрія. – Харків: ББН, 2000. – 172с., іл.
6. Литвиненко Г.М.,Федченко Л.Я. Збірник завдань для атестації з матемаики учнів 7-9 класів. Частина І. Алгебра. Частина ІІ. Геометрія. – Харків: ББН, 2000. – 272с., іл.
7. Тесленко В.В.,Федченко Л.Я. Збірник завдань для атестації з матемаики учнів 5-6 класів. – Харків: ББН, 2000. – 68 с.
8. Литвиненко Г.Н.,Федченко Л.Я., Швец В.А. Сборник заданий для аттестации по математике учащихся 10-11 классов. Часть І. Алгебра и начала анализа. Часть ІІ. Геометия. – Донецк: Новый мир, 2000. – 170 с., илл.
9. Литвиненко Г.Н.,Федченко Л.Я., Сборник заданий для аттестации по математике учащихся 7-9 классов. Часть І. Алгебра. Часть ІІ. Геометрия. – Донецк: Новый мир, 2000. – 265с., илл.
10. Тесленко В.В.,Федченко Л.Я., Сборник заданий для аттестации по математике учащихся 5-6 классов.- Донецк, Новый мир, 2000. – 68 с.
11. Олейник Н.М. Тест как инструмент измерения уровня знаний и трудности заданий в современной технологии обучения. Учеб. пособие. – Донецк: ДонГУ, 1991. – 66 с.
12. Програми для середніх загальноосвітніх шкіл. Математика. 8-11 класи. – Київ: Перун, 1996. – 48 с.
13. Смирнов А.П. Основы статистической теории обучения и контроля знаний: Метод.пособие. – М.: Высш.школа, 1981. – 262 с., илл.
14. Швець В.О., Федченко Л.Я. Випускні іспити з математики на атестат про середню освіту // Математика в школі. – 1998. – № 1. – С.28-30.

Резюме. Рассматриваются различные подходы к оцениванию устных и письменных работ по математике по 12-бальной шкале. Исследуя различные формы оценивания, обсуждаются их преимущества и недостатки.

Summary. Different approaches to an estimation of verbal and written works of a mathematics on the 12-number scale are considered. Various forms of estimation are deficiency of this forms are discussed.

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Карлащук А.Ю., учитель математики,
Общеобразовательная специализированная
физико-математическая школа №35, г.Донецк

Необходимость в обновлении системы образования связана с изменениями, которые произошли и происходят в нашем обществе сейчас, во всех областях жизни. Изменяется все, в том числе и характер труда, в котором большая часть приходится на интеллектуальную составляющую: изменяется экономическая деятельность, ее техническая база и организационные формы, ее структура, условия и требования, которые она предъявляет к уровню знаний и квалификации человека. Возникают и развиваются новые виды и типы деятельности. Это касается, прежде всего, общеобразовательной школы, в которой в последние годы приоритетными стали ориентация на личностное и всестороннее развитие индивидуальности ученика на основе выявления его задатков и способностей, на создание условий для полного раскрытия ее способностей. В связи с этим, наибольшую актуальность приобретают вопросы педагогических исследований, ориентированные на реализацию эвристического и исследовательского методов в учебном процессе, в частности, в процессе обучения математике.

Использование таких методов обучения обуславливает, в определенной мере, реализацию исследовательской деятельности учащихся.

Проанализировав и обобщив ряд исследований [1,2,3,4,5,6,7 и др.] мы определили учебную исследовательскую деятельность как деятельность учащихся, организуемую педагогом с использованием дидактических средств, направленную на выполнение учебных исследовательских заданий, тебующих поиска объяснения и доказательства закономерных связей и отношений экспериментально наблюдаемых или теоретически анализируемых фактов, явлений, процессов, задач в которой доминирует самостоятельное применение приёмов научных методов познания и в результате которой учащиеся активно овладевают знаниями, развивают свои исследовательские умения и навыки, формируют познавательные мотивы и организационные качества.

Мы рассматриваем учебную исследовательскую деятельность как целостную систему, в которой выделяем следующие компоненты: содержательную, операционно-процессуальную, мотивационную, организационную и методологическую с одной стороны и цели, продукты, способы (в широком понимании, включающие как идеальные способы(знания в том числе), так и материальные) и задачи, с другой стороны. Выделение таких компонент учебной деятельности наиболее продуктивно для реализации системного подхода. Эти пять компонент учебно-исследовательской деятельности тесно связаны между собой. Соответствующий уровень развития каждой из них является необходимой предпосылкой и следствием развития остальных. Говоря об учебной исследовательской деятельности мы так же отмечаем тот факт, что исследовательская деятельность оказывает влияние на свойства личности. С другой стороны, мы отмечаем важность анализа следующих компонент исследовательской деятельности: целей, продуктов, средств и задач.

Проанализировав дидактическую суть исследовательской деятельности, а также учитывая собственные наблюдения , мы пришли к выводу, что организовывая в учебном процессе исследовательскую деятельность у учащихся формируются исследовательские умения.

При определении исследовательских умений мы придерживались точки зрения И.Я.Лернера и М.Н.Скаткина о том, что умение – способность выполнять сложное комплексное действие или готовность человека к выполнению сложных комплексных действий на основе знаний, навыков и практического опыта. Навыки – элементарные операции, они являются составными компонентами умений. Таким образом, под учебными исследовательскими умениями мы понимаем способность ученика выполнять умственные и практические действия, соответствующие научно-исследовательской деятельности и подчиняющиеся логике научного исследования, на основе знаний, навыков, приобретаемых в процесе изучения основ наук.

Исходя из того, что учебная исследовательская деятельность имеет свои структурные элементы, мы предлагаем классифицировать учебные исследовательские умения в соответствии с ними, принимая за основу классификацию учебных умений по И.Я.Лернеру [9]: организационно-практические; интеллектуальные ; психолого-характерологические .

Мы выделяем четыре уровня сформированности учебных исследовательских умений в математической учебной исследовательской деятельности учащихся: низкий, средний, достаточно высокий и высокий.

На назком уровне ученики под педагогическим руководством учителя проводят анализ исследовательской задачи, анализ данных, по сформулированной учителем проблеме выявляют основополагающие теоретические факты, проектируют ее решение и проводят его по программе поэтапных действий, по заданию учителя. При этом используют мыслительные операции анализа, синтеза, сравнения.

На среднем уровне учащиеся самостоятельно анализируют исследовательскую задачу, ее условие, требование. На основе сформулированной проблемы делают попытку выдвинуть различные предположения. По рекомендации учителя проектируют решение и проводят его, проверяют и анализируют результаты с помощью учителя. Проводят аналогии, делают обобщения.

На достаточно высоком уровне учащиеся самостоятельно анализируют исследовательскую задачу, систематизируют методы решения известные ранее для выбора оптимального метода решения задачи, частично самостоятельно проводят решение. Самостоятельно делают анализ решения, полученных результатов, проверку.

На высоком уровне ученики выполняют требования достаточно высокого уровня. Самостоятельно проводят теоретический анализ исследовательской задачи, самостоятельно формулируют проблему, выдвигают гипотезы, идеи, с построением моделей, с рациональным использованием мыслительных операций. Самостоятельно делают проверку и анализ полученных результатов. На этом этапе для учащихся характерно абстрагирование от конкретных количественных отношений и пространственных форм, конкретизация, оперирование формальными структурами.

Для выявления уровней сформированности учебных исследовательских умений при решении систем задач с параметрами мы использовали коэффициент уровня сформированности учебных исследовательских умений [10, с.142]:

$$K = \frac{1}{X_0 \; N} \sum_{i=1}^{X_0} \quad n_i \qquad \text{, где}$$

X_i – варианта уровня, n_i – количество учащихся с i-м уровнем сформированности умений, N – количество учащихся, выполнявших работу, X_0 – максимальное значение варианты уровня.

Для определения полноты выполняемых операций, из которых складывается деятельность мы пользовались коэффициентом полноты выполнения операций [10, с.142]:

$$\overline{P} = \frac{\sum_{l=1}^{P} \;\; {}_{l}m_J}{PN} \quad , \quad \text{где}$$

P_i – количество операций, выполненных группой учащихся, m_j – количество учащихся в j-й группе, N – количество учащихся, выполнявших работу, P – количество операций, которые должны быть выполнены.

Поскольку наше исследование направлено на развитие исследовательских умений в области школьного курса математики, то целесообразно говорить об учебной исследовательской математической деятельности, которая направлена на решение математических задач. В связи с этим уместно отметить, что в последние годы особо подчеркивается роль развивающей функции задач. З.И.Слепкань указывает на то, что задачи должны формировать исследовательский стиль умственной деятельности [11]. На наш взгляд, задачи с параметрами в полной мере отвечают этому требованию. Поскольку в учебном процессе возможно использование таковых как моделей реальных систем и прикладных процессов, их исследование, а так же обобщения математических задач, понятий и предложений, учитывая при этом развивающую функцию таких задач, мы считаем, что обогащение школьного курса математики системами задач с параметрами, а также обучение методике их решения – один из целесообразных путей формирования исследовательских умений школьников.

В связи с этим необходимым является включение в содержание школьных учебников систем таких задач, отбор которых может быть выполнен в соответствии с содержанием курса математики на котором целесообразно реализовать исследовательскую деятельность учащихся, а так же предлагаемой нами классификации задач с параметрами [12].

Ниже приведем примеры некоторых задач с параметрами с описанием исследовательских умений, которые формируются при их решении.

Задача1. При каких значениях параметра *a* система уравнений

$$x + y + z = a$$

. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ *имеет единственное решение?*

Эта задача может решаться несколькими способами.

Один из способов получается , если из первого уравнения выразить z через x и y, подставить найденное выражение во второе уравнение, получив при этом квадратное, относительно x, уравнение и проанализировать дискриминант. Другое решение можно получить, рассмотрев геометрическую интерпритацию задачи: первое уравнение описывает плоскость, пересекающую координатные оси в точках A(a,0,0), B(0,a,0), C(0,0,a), а второе уравнение – сферу с центром в начале координат O и радиусом $\sqrt{3}$.

Для выяснения того, что представляет пересечение сферы с плоскостью, нужно сравнить радиус сферы с расстоянием от ее центра до плоскости (не прибегая к аналитической геометрии достаточно вычислить высоту OD тетраэдра OABC). Еще один способ: решение (1,1,1) угадывается из второго уравнения, подставляя которое в первое уравнение получим значение a=3. Остается доказать единственность такого решения.

В процессе решения этой задачи у учащихся формируется умение решать задачу несколькими способами; умение конструировать новый способ из ранее изученных; умение применять вспомогательный прием; умение применять нестандартный способ решения; умение решать задачу с необычным содержанием известным способом; умение переключаться с прямого хода рассуждений на обратный.

Задача 2. Найти значение параметра C в законе Бойля-Мариотта PV=C по экспериментальным данным (100;1000),(200;150),(300;50),(400;10),(500;5). Эта задача является задачей с противоречивыми данными. Традиционное понятие решения для учащихся приводит к противоречию – имеем несколько разных значений параметра C для каждой пары данных. С другой стороны, решение найти необходимо. Решая вспомогательные задачи (нахождение C для каждой пары данных), а затем усредняя результат можно получить решение задачи. Решая такую задачу учащиеся проходят некоторые этапы мини-исследования: решение задачи внутри модели и интерпритация результатов. При решении задач с избыточными данными у учащихся формируются следующие исследовательские умения: умение анализировать условие исследовательской задачи; умение выявлять основополагающие теоретические факты, необходимые для ее решения; умение конструировать сложный способ из известных простых; умение составлять соотношения, условия по заданным свойствам (вместо узнавания по заданным условиям); комбинировать известные приемы и способы с другими; умение переносить знания в новые ситуации..

Полезными являются так же задачи с недостающими и нереальными данными В процессе решения таких задач развиваются следующие исследовательские умения: наблюдение явлений в плане логических и математических категорий; выделение математического аспекта при восприятии этих явлений; определение круга вопросов (объектов, проблем), с которыми связан подлежащий изучению объект; абстрагирование предмета изучения, его выделение из ряда других с ним связанных, выявление теоретических фактов, исходя из проблемы исследования; анализ фактов, восприятие их через призму математических отношений; выдвижение различных предположений с обоснованием их возможности (гипотезы); формулирование обобщенного теоретического принципа, объясняющего сущность задачи (идею); математическое формулирование проблемы; предвидение результатов; разработка математической модели прикладных процессов; построение вариантов планов действия, решения; переформулирование идеи в разных вариантах и др.

Приведем пример одной из таких задач.

Задача 3. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 200 км выезжает автомобиль. За какое время он преодолевает расстояние АВ?

В данной задаче, казалось бы, не хватает условия. Но, учитывая допустимую скорость автомобиля, и считая, например, что автомобилю нужно преодолеть расстояние между пунктами как можно скорее, не нарушая при этом правил дорожного движения по городской и загородной трассе, можно ввести параметр V – скорость автомобиля, считая ее в км/ч, при этом $60 \leq V \leq 90$. Ответом задачи можно считать интервал времени $t \in [t_1;t_2]$, $t_i = \frac{200}{V_i}$ ч, $V_i \in [60;90]$. То-есть $t \in [3\frac{2}{9};\ 3\frac{1}{3}]$.

В связи с введением в школьный курс вероятностно-статистической линии полезно рассматривать задачи с параметрами в стохастике. Примерами таких задач могут быть задачи на изучение характера зависимости распределения , содержащего параметры в зависимости от изменения этих параметров; отыскание значений параметров по статистической или иной информации о распределении; задачи о выборе значений параметров в стохастической модели на основе условия оптимальности или иных поставленных ограничений. Направлением исследовательской работы учащихся может быть также вероятностная интерпретация неравенств. Модельный пример: известно, что параметр P: $0<P<1$, значит $P^2<P$. Каков стохастический смысл?

1. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности. – М.: Высшая школа, 1981. – 240 с.
2. Галатюк Ю.М. Организация исследовательской работы учеников во время изучения физики в старших классах средней школы: Дисс. … канд. пед. наук. – Ровно, 1996. – 167с.
3. Формирование учебной деятельности в учебном процессе / Под ред.В.В.Давыдова, И.Ломшера, А.К.Марковой. – М.: Педагогика,1982. – 216 с.
4. Костюк Г.С., Балл Г.А. Категория задачи и ее значение для психолого-педагогических исследований // Вопросы психологии. – 1977. – №34. – С.22
5. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1982
6. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. – М.: Педагогика, 1972.
7. Щукина Г.И. Роль деятельности в учебном процессе. – М.: Просвещение, 1986. – 143 с.
8. Якиманская И.С. Развивающее обучение.- М.: Педагогика, 1979. – 144с.
9. Лернер И.Я. Об учебных умениях и их отражении в учебниках. – Проблемы школьного учебника. – Вып.12.- М.:Просвещение, 1983. – С.228-234.
10. Ушачев В.П. Формирование исследовательских умений у учащихся в процессе производственной практики на основе активного знания по физике: Дисс. … канд. пед. наук. – Челябинск, 1988. – 202с.
11. Слепкань З.И.Психолого-педагогические основы обучения математике.- К.: Рад. Школа, 1983. – С.124
12. Карлащук А.Ю.Новые подходы к классификации задач с параметрами (развивающий аспект) / Дидактика математики: проблемы и исследова-

ния // Международный сборник научных работ. – Вып.3(13). – Донецк: ТЕАН, 2000. – С.86-90

Резюме. Пропонуються деякі аспекти формування дослідницьких умінь школярів та организації дослідницької діяльності в процессі розв'язування математичних задач з параметрами.

Summary. Some aspect of organization of research activity in the process when problems with parameters are solved and formation research skills of student are proposed.

ФОРМУВАННЯ ГОТОВНОСТІ СТУДЕНТІВ ДО ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

В.І. Шавальова, кандидат педнаук, доцент
Бердянський державний педінститут ім П.Д.Осипенко

Кожна методична система навчання функціонує на певному соціальному фоні, що робить на неї вирішальний вплив. Найбільш яскраво він спрямований на провідний компонент методичної системи – цілі навчання.

Зміни, що відбуваються сьогодні на Україні, призвели до появи нових орієнтирів у системі освіти. Головним орієнтиром цієї системи є учень, його потреби й інтереси.

Поява нових типів навчальних закладів, розрахованих на дітей, що проявили інтерес і здібності до однієї з областей творчої діяльності, організація допомоги у виявленні талановитих дітей і забезпечення розвитку їх творчого й інтелектуального потенціалу дали можливість загальноосвітнім школам працювати за різними навчальними планами, програмами і підручниками, що, у свою чергу, змінило соціальне замовлення школи педагогічному вузу, і спричинило зміну мети викладання фундаментальних математичних дисциплін.

На сьогодні математичний аналіз, алгебра і геометрія повинні не лише дати студентам необхідні знання, навички й уміння, а і підготувати майбутніх учителів математики до навчання в умовах демократизації, гуманізації і диференціації освітнього процесу, до використання нових інформаційних технологій, до викладання математики в середніх навчальних закладах різних типів за різними навчальними планами, програмами і підручниками.

У силу закономірностей, пов'язаних із внутрішньою будовою методичної системи, зміна одного компонента з необхідністю призводить до зміни й інших, тобто всієї системи в цілому. У цьому, як відомо, реалізується принцип повноти в удосконаленні методичної системи. Мета, з одного боку, органічно пов'язана з змістом діяльності і спрямована на його здійснення, а з іншого, будучи сформульованою, з урахуванням не тільки конкретного змісту діяльності, але і вищеназваних цілей, вона упорядкує, а не рідко і потребує внести певні корективи в сам зміст навчання і виховання. Що ж стосується форм, методів і засобів діяльності, то цілі закономірно їх визначають.

Зміст математичних курсів у педвузі визначається програмою для фізико-математичних факультетів педінститутів. Формування готовності студентів до роботи в сучасній школі потребує проекції матеріалу, що вивчається в педвузі, в різні навчальні плани і програми, акцентування уваги на способах введення понять у середніх школах різних типів, виділення питань цікавих для індивідуальної роботи учнів, розгляду історичного аспекту матеріалу теми, вказівки задач і вправ для різних профільних класів, а головне, вказівки вимог до знань, умінь і навичок студентів, орієнтованих на роботу в основній школі, профільному нематематичному класі, класі або школі з поглибленим вивченням математики.

Основною формою організації навчального процесу в середніх школах усе ще залишається урок, проте, ряд навчальних планів передбачає проведення лекцій, семінарських і практичних занять, організацію самостійної роботи учнів. У зв'язку з появою нових форм організації навчального процесу в школі, необхідно готувати студента-математика до уміння використовувати у своїй майбутній роботі зазначених вище та інших форм організації навчального процесу. В цьому максимально може сприяти використання різноманітних форм проведення занять з фундаментальних математичних дисциплін, а також розробка студентами матеріалів для проведення подібних занять у майбутньому.

На лекційних заняттях з метою формування готовності студентів до викладання в школах різних типів необхідно нагадувати студентам про те, що евристична модель викладання і пов'язані з нею форми навчальної роботи виступають як домінуючі в класах фізико-математичного профілю, репродуктивна модель – основна форма навчальної діяльності в профільних класах нематематичного профілю, а догматична – у слабких класах основної школи. Питання загальної методики математики на лекційних заняттях необхідно супроводжувати стислими коментарями, говорячи про застосування у викладанні індукції і дедукції, аналізу і синтезу; показуючи методику введення математичних понять, аксіом, теорем у середніх школах різних типів; організуючи самостійну роботу, розвиваючи навички самоконтролю. На лекційних заняттях є можливість сказати про виконання того або іншого дидактичного принципу. Задача викладача полягає в тому, щоб створити таку систему пропедевтичного ознайомлення студентів з принципами дидактики, при якій без особливої витрати часу вказувалися б приклади виконання цих принципів.

Наприклад, студенти повинні усвідомити, що те визначення, з яким вони познайомилися в школі, є спеціалізація вузівського визначення. Далі студентам потрібно сказати наступне: «У викладі цього питання дотриманий один із принципів навчання – принцип науковості. У курсах педагогіки і методики викладання математики ви глибоко і всебічно проаналізуєте принципи навчання. А в нашому курсі ми будемо тільки наводити окремі приклади, що ілюструють ці принципи. Принцип науковості в математиці полягає не в тому, щоб матеріал у школі викладати так, як він освітлюється в сучасній науці, а в тому, щоб дати таке його трактування, яке дає можливість надалі розвинути, узагальнити й одержати сучасний виклад».

Особливо слід підкреслити, що для дотримання принципу науковості майбутній учитель повинен добре знати строгий виклад того матеріалу, що міститься в шкільному підручнику. Прикладів, що ілюструють виконання дидактичних принципів викладання кожного математичного курсу так багато, що фіксувати увагу на кожному з них потребувало б невиправдано багато часу. Вважаємо, що на лекціях досить показати 2 – 3 приклади, які ілюструють різні принципи дидактики.

На практичних заняттях відбувається повторне осмислення вивченого матеріалу, відтворення і застосування знань з метою їх поглиблення і закріплення. Студенти вчаться застосовувати теоретичні знання на практиці при розв'язуванні задач і вправ, готуються до проведення уроків розв'язування задач, комбінованих уроків, практичних занять у майбутньому. Самостійне розв‘язування задач сприяє вихованню студентів, особливо вихованню волі, наполегливості, творчості й інтересу до математики. В процесі проведення практичних занять викладач педвузу повинен використовувати диференційований підхід, оскільки, поперше, в майбутньому студент буде працювати в умовах рівневої диференціації і педвуз повинен дати йому зразок реалізації ідей диференційованого навчання, а, подруге, кожний студент повинен засвоїти практичні уміння і навички на рівні, що відповідає його навчальним можливостям і схильностям до подальшої педагогічної діяльності в середній школі обраного типу.

Практичні заняття в педвузі повинні бути побудовані так, щоб переконати студентів у тому, що слушність, повноцінність формування понять і засобів дій залежить від вправ, запропонованих учням у тому випадку, якщо вони правильно організовані, і наприкінці занять проводиться аналіз запропонованих до розв'язування задач. Практичні заняття можуть попередити таку методичну помилку вчителів, як швидкий перехід до формального оперування поняттями. Студентам потрібно показати і пояснити, що учням шкіл усіх типів доводиться виконувати вправи, які не потребують точного знання визначення, глибокого проникнення в його сутність і передчасне введення алгоритмів та формальне їх використання роблять знання неосмисленими. При доборі вправ необхідно враховувати психологічні закономірності засвоєння понять, формування умінь і навичок.

Семінарські заняття з математики знаходять усе більш широке застосування в сучасній школі. Тому студент педвузу, вивчаючи фундаментальні математичні дисципліни, поступово повинен готуватися до проведення семінарських занять з школярами. Природно, що при вивченні педагогіки студенти-математики, як і студенти інших фахів педвузу, знайомляться з різноманітними підходами до типізації семінарських занять, з засобами їх проведення, з вимогами до семінарів у залежності від пізнавальних можливостей і вікових особливостей учнів, з особливостями проведення семінарських занять. Проте цього недостатньо для побудови загальнодидактичної системи шкільних семінарів з математики. Вчитель повинен вміти визначити тему семінарського заняття і відповідно до врахування рівня пізнавальної самостійності учнів і темою заняття підібрати потрібний тип заняття, питання які виносяться на обговорення, уміти задавати питання виступаючому, підбивати підсумок кожного виступу і всього семінару, підібрати літературу, направити підготовчу роботу доповідачів, співдоповідачів і опонентів, скласти їм план і тези; відібрати фрагменти робіт для коментованого читання, підібрати теми для диспуту, міжпредметного семінару. На наш погляд, це можливо лише в умовах проведення семінарських занять з математичних дисциплін у педвузі з орієнтацією на їх копіювання в майбутній педагогічній діяльності.

Семінари повинні складатися з двох взаємозалежних ланок – самостійного вивчення студентами програмного матеріалу й обговорення на заняттях результатів їх самостійної пізнавальної діяльності. Семінари формують у студентів уміння самостійно одержувати знання. Виробляють активну життєву позицію, розвивають інтерес до предмета, мають велике пізнавальне значення: студенти, готуючись до них, знайомляться з методичною літературою й історією математики, досягненнями науки і техніки, освоюють такі розумові операції як аналіз, синтез, абстрагування, конкретизація, узагальнення, порівняння складних об'єктів та їх систем. У процесі активної розумової діяльності, коли кожний стежить за ходом думок інших, розвивається пильність і такі важливі якості як широта, глибина, різнобічність поглядів, уміння швидко визначити свою точку зору, знайти вирішення питання. Колективне обговорення відіграє важливу роль в розвитку мови майбутніх учителів, зокрема, монологічної, що при інших формах навчання не отримує належного стимулювання.

В сучасній школі одним з основних джерел одержання знань стає самостійна робота учнів. Тому у вузі велику увагу необхідно приділяти її організації, оволодінню студентами засобами і прийомами її практичного здійснення.

Метод, за допомогою якого досягається заданий результат, не випадковий. Він певним чином обумовлений змістом поставленої цілі і є компонентом цілісної діяльності. В Україні налагоджена і досить чітко функціонує розгалужена система методичних служб різних масштабів. Проте, на жаль, не кожний вчитель може правильно вибрати методи своєї праці, тобто організувати свою роботу, роботу учнів, відношення співробітництва з учнями. Отже, навчання студентів у процесі вивчення фундаментальних дисциплін організаційно-діяльністному підходові до навчання становить інтерес в плані формування готовності студентів до педагогічної діяльності. Студент педвузу повинен у процесі вивчення фундаментальних математичних дисциплін вдосконалювати свої уміння вирішувати проблеми вибору методів навчання, відомих йому з педагогіки. Для успішного вирішення розглядуваної проблеми необхідна педагогічна орієнтація методів викладання в педагогічному вузі, тобто викладач, з одного боку, повинен вибирати методи, що активізують пізнавальну діяльність студентів, а з іншого, пояснити їм необхідність їх використання, що природним чином впливає на усвідомлення студентами ієрархії методів навчання, їхньої класифікації на різних основах, особливостей використання.

При вивченні математичних дисциплін у педвузі студенти повинні навчитися активно використовувати такі методичні прийоми, як опорні схеми, коментоване управління, перспективна підготовка, рейтингова система контролю, обчислювальний експеримент, що уже сьогодні використовуються в шкільній практиці, а також застосовувати при викладанні математики індукцію і дедукцію, аналіз і синтез, форми і методи перевірки знань учнів; організовувати самостійну роботу; розвивати навички самоконтролю.

Студент педагогічного вузу в майбутній своїй діяльності буде працювати з підлітками, важливою особливістю пам'яті яких є можливість встановлювати більш складні асоціації зв'язку нового матеріалу із старим, включаючи нове в систему знань. Від утворення окремих асоціацій, що характерні для молодшого школяра, підліток переходить на рівень формування внутріпредметних асоціацій, а в старшому шкільному віці виникають умови для переходу на вищий рівень – рівень міжпредметних асоціацій. Тому при організації навчальної діяльності учнів створюються умови для широкого використання міжпредметних зв'язків.

Вивчення і аналіз навчально-виховного процесу в масовій школі дозволяє зробити висновок про те, що МПЗ усе ще залишаються в резерві методичних засобів, що забезпечують ефективність процесу навчання. Очевидно, цілком справедливою є думка про те, що сучасна школа не готова до такого навчання, у якому зливалися б воєдино знання з різних дисциплін. Школа до цього не готова тому, що вчителі не мають конкретного матеріалу, яким вони могли б керуватися у викладанні. Тому при підготовці вчителя дуже важливо навчити студента використовувати цей принцип. Успіх у фаховому становленні майбутнього вчителя ми бачимо в посиленні міжпредметних зв'язків даного навчального предмета з іншими математичними дисциплінами, інформатикою, фізикою.

Велику роль у вирішенні цього питання слід відвести використанню персонального комп'ютера у викладанні фундаментальних математичних дисциплін. Майбутній вчитель математики повинен вміти використовувати комп'ютерні програми на всіх етапах навчання, при цьому, визнавши, що з їх допомогою забезпечується інтенсифікація навчального процесу, проте застосування ПК повинно відповідати особливостям навчального процесу і спиратися на теорію організації і керування, психологію навчання.

У своїй роботі ми використовуємо програмний комплекс GRAN, розроблений Київським національним педагогічним університетом спеціально для викладання математики в школі, на лекціях при демонстраціях різноманітних понять і властивостей математичних об'єктів, на практичних заняттях для скорочення обчислень і проведення обчислювальних експериментів. Велику увагу приділяємо використанню ПК у самостійній роботі студентів, формулюючи такі завдання, як: «підготувати ілюстрації для викладу теми», «розробити систему вправ для учнів технічного ліцею» і т.д.

Досвід викладання математичних дисциплін з використанням ПК з відповідним ПЗ показав, що інтеграція математичних курсів і інформатики неминуче призводить до змін в змісті навчального матеріалу й у методиці його вивчення. Наприклад, за рахунок звільнення часу від необхідності виконання арифметичних операцій при розв’язуванні задач з’являється можливість розширити коло розв’язування прикладів творчого характеру.

Досвід використання ПК переконує, що застосування комп'ютерних програм у навчальному процесі дозволяє інтенсифікувати процес навчання і підвищити його ефективність, використовуючи можливість перебору великої кількості інформації; розвивати пізнавальну активність, самостійність, встановлювати зворотні зв'язки, необхідні для керування навчальним процесом; систематично контролювати знання й уміння учнів; вдосконалювати форми і методи організації самостійної роботи, диференціювати процес навчання в масовій аудиторії.

Проведення найпростіших обчислювальних експериментів і дослідження математичних моделей при вивченні тих або інших питань теорії безумовно є цінним у розвитку творчих здібностей майбутніх вчителів у питанні зв'язку навчального процесу з наукою і практикою. Комп'ютерне моделювання методами динамічної графіки і мультиплікації має схему моделювання явищ різним набором параметрів або різних умов протікання, тим самим формують навички експериментатора-дослідника.

При підготовці вчителя математики до використання НІТ у навчальному процесі важливо навчити студентів використовувати ПЗ загального призначення, в першу чергу, для організації своєї роботи: підготовки рефератів, доповідей, творчих письмових робіт, фрагментів до лекції; побудова опорних схем, що систематизують таблиці, карток-інструкцій; упорядкування словників математичних термінів і знаків, довідників математичних формул, бібліографічних каталогів і ін. Таке використання ПК вдосконалює володіння студентами *засобами застосування комп'ютера*, що є складовою інформаційної культури.

Для того, щоб навчити майбутнього вчителя успішно здійснювати облік і контроль, потрібно, насамперед, показати, як правильно спланувати роботу за часом, відповідно нормувати її, а для цього необхідно знати теорію і практику врахування і контролю відповідно до сучасних вимог.

Студенти повинні зрозуміти, що основна задача контролю складається не в тому, щоб ловити когось на помилках, а в тому, щоб допомогти вчасно виправити помилки, поліпшити роботу. Педагогічний контроль – це система виміру й одержання інформації, головним чином, про якісний стан роботи, її зміст, організацію; це система спостереження і перевірки відповідності педагогічної праці розробленому плану, нормам, вимогам, правилам; це виявлення результатів впливу педагога на учнів, досягнутих успіхів, допущених помилок, відхилень.

Викладач вузу може на прикладах показати, що контроль за процесом роботи, за його результатами – це контроль вчителя за своєю діяльністю, і за роботою учнів, за процесом їхньої взаємодії, що контроль і самоконтроль у процесі педагогічної роботи мають свої задачі, структуру, утримання, форми і методи. Вивчаючи фундаментальні математичні дисципліни, студенти можуть одержати підтвердження того, що науково обґрунтований контроль за діяльністю учнів – це вивчення учня, динаміки його працездатності й успішності: систематичність, регулярність контролю забезпечують його дієвість, своєчасне усунення прогалин у знаннях учнів.

Таким чином, одним із шляхів підвищення готовності студентів до навчальної діяльності є професійно-педагогічна спрямованість усього навчального процесу, зокрема, викладання математичних курсів, що є найбільш уразливою (у смислі педагогічної орієнтації) лінією підготовки вчителя. У професійно-педагогічній спрямованості навчання математиці в педагогічному вузі можна виділити дві лінії: педагогічну орієнтацію змісту математичних курсів і педагогічну орієнтацію методів викладання.

Перше полягає в акцентуванні уваги на поняттях і методах, що мають велике значення в математичних курсах в середніх школах різних типів; різних засобах їх введення, практичних пропозиціях, на відбиток в змісті навчання дій, адекватних математичним поняттям і методам. У системі вправ в математичних курсах повинні бути і дії, адекватні діяльності вчителя математики (організація навчальної роботи, відбір вправ для різних конкретних цілей, формулювання тем творів і рефератів, упорядкування планів семінарських занять і т.д.). При розв‘язуванні задач слідує також передбачити оволодіння діями, адекватними пошуку розв‘язання: використання аналогій, узагальнення, конкретизації та інших методів наукового пізнання. Студент педагогічного вузу вже з першого курсу повинен відчути необхідність знань і прагнути побачити своє місце в системі середньої освіти: робота в базовій школі, гімназії, ліцеї, профільному класі або школі нематематичного профілю, класі або школі з поглибленим вивченням математики. Цьому максимально може сприяти проекція досліджуваного матеріалу в навчальні плани середніх шкіл різних типів, тобто побудова вертикальних стрижнів зв'язку шляхів виділення питань цікавих для індивідуальної роботи, дослідницької і творчої діяльності учнів, розгляд питань історії математики, добору задач для економічних, фізичних, математичних класів, побудови сценаріїв навчальних і контролюючих програм.

Друга лінія – педагогічна орієнтація методів і засобів навчання – полягає в такій організації занять, яка б служила зразком для майбутнього вчителя математики. Реалізація цього напрямку проявляється в пошуку таких прийомів, методів і засобів навчання, які активізують навчально-пізнавальну діяльність студентів. Це – впровадження проблемності, використання рейтингової системи контролю, написання рефератів і математичних творів, проведення диспутів і міжпредметних семінарів, застосування персональних комп'ютерів і т.д. Викладач вузу повинен озброїти студентів як евристиками пізнання, так і евристиками викладання. Для цього необхідно розкривати й аналізувати, обговорювати і роз'яснювати власний стиль викладання, висловлювати свої погляди на викладання, говорити про те, чому і яким чином збирається навчити. Зазначені дії сприятимуть зародженню у студентів творчої методичної думки, власного стилю викладання і дослідницької роботи.

У світлі викладеного вище стає зрозумілим, що один із головних принципів професійно-педагогічної спрямованості навчання математичним дисциплінам є принцип бінарності – об'єднання в кожному математичному курсі наукової і методичної ліній. Реалізація цього принципу дозволяє навчити студентів ставити і формулювати ціль і задачі тієї або іншої конкретної діяльності, вибирати доцільні форми, методи і засоби, розробляти плани, розраховувати роботу за часом, здійснювати облік і контроль, визначати перспективи тієї або іншої педагогічної діяльності, підходити до роботи комплексно, використовуючи досягнення науки і практики, наукові методи, а, головне, допоможе студентам визначити своє місце в системі середньої освіти у майбутньому, що відповідає їхнім знанням і здібностям.

Резюме. Для профессионально педагогической направленности процесса обучения математике в педагогическом вузе необходима педагогическая ориентация содержания математических курсов и педагогическая ориентация методов преподавания.

Summary. In the article is shown that the pedagogical trends in the contents of the mathematics course and pedagogical direction of educational methods are necessary for the professional and pedagogical trend in the process of education of mathematics in pedagogical institute.

ПРОФЕСІЙНА СПРЯМОВАНІСТЬ КУРСУ «ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ» В ПЕДАГОГІЧНОМУ ВУЗІ

В.Г. Бевз, канд.пед.наук., доцент,
Національний педуніверситет ім. М.П.Драгоманова, м.Київ

Історія математики – це одна з математичних дисциплін. Її вивчають у всіх класичних і педагогічних університетах на останніх курсах. Це пов’язано з тим, що вивчення історії математики як науки можливе лише після опанування студентами основних математичних дисциплін: алгебри, геометрії, математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірності тощо. Загальна математична підготовка студентів на фізико-математичному факультеті завершується курсом історії математики.

В педагогічному вузі на цей курс покладаються такі завдання:

– відтворити багатство фактичного змісту історичного розвитку математики, висвітлити виникнення математичних методів, понять, ідей та окремих математичних теорій;

– з'ясувати характер і особливості розвитку математики у різних народів в певні історичні періоди;
– показати внесок, зроблений в математику великими вченими минулого, зокрема і українськими вченими;
– продемонструвати багатогранні зв'язки математики: з практичними потребами і діяльністю людей, з розвитком інших наук, а також вплив економічної, соціальної та ідеологічної структури суспільства на характер розвитку математики;
– розкрити історичну обумовленість логічної структури сучасної математики, діалектику її розвитку, співвідношення частин математики та її перспективи;
– дати майбутнім учителям історичні знання, необхідні їм для правильного розв'язання методичних і методологічних питань, які виникають в процесі викладання математики.

В нашому університеті розроблено комплексний підхід до вивчення історії математики. Процес засвоєння знань з цієї дисципліни відбувається в тій чи іншій мірі на лекціях та семінарських заняттях, під час самостійного опрацювання відповідної літератури, написання рефератів, виконання розрахунково-графічних робіт та складання заліку.

Традиційно курс історії математики будують на хронологічній основі. Матеріал, що виноситься на лекції, має охватити розвиток математики з найдавніших часів і до XX століття включно. Щоб з усіх математичних відомостей за цей час відібрати ті, в яких найяскравіше розкриваються закономірності розвитку математики, доцільно розглянути кожний з основних етапів її розвитку (за А.Колмогоровим): 1)зародження математики; 2)елементарна математика; 3) створення математики змінних величин; 4) сучасна математика.

Основна увага тут приділяється фактам, гіпотезам, теоріям, законам, методології, а також визначенню ролі науковців, зокрема українських, у розвитку математики.

Виходять за межі хронологічного викладу перша і остання лекції, на яких розглядаються питання:

- значення історико-математичних знань для вчителя математики;
- історія вітчизняної математики.

Історія математики має велике значення у вивченні математики в школі. А саме: а) *освітнє* – допомагає з’ясувати роль і місце математики в практичній діяльності людей; б) *виховне* – збуджує інтерес та любов до предмету, потяг до наукової творчості, критичне відношення до нових фактів; в) *розвиваюче* – є ключем для розуміння логіки побудови наукових теорій.

Питання про доцільність використання елементів історії у викладанні математики та інших наук неодноразово піднімалося ще в XIX столітті. З цього приводу висловлювалися багато вчених і педагогів різних країн. Зокрема відомий французький математик і філософ Анрі Пуанкаре писав: «Вихователь повинен змусити дитину пройти через ті самі етапи, що і його предки; швидше, але не руйнувати етапи. Ось чому історія науки має бути нашим головним провідником».

Видатний український математик і педагог М.Остроградський підкреслював: «…було б злочином для людей, вивчаючи матеріали, не шанувати не тільки імен дослідників, але й їх методів, їх експериментів, яких вони досягли.

… біографії людей, корисних для науки і мистецтва, є одним із методів, якого ми вживаємо для привернення уваги учнів. Зацікавити дитину – саме в цьому один з найважливіших принципів нашої теорії».

В різні часи методисти по різному визначали мету введення елементів історії математики в навчальний процес. Але незмінними завданнями і до наших днів залишаються:

– підвищення інтересу учнів до вивчення математики;
– поглиблення розуміння учнями математичного матеріалу, який вивчається;
– розширення розумового кругозору учнів і підвищення їх загальної культури;
– створення в учнів правильного погляду на математику в цілому.

Викладання математики, як і будь-якої іншої навчальної дисципліни, у всіх класах бажано супроводжувати історичними екскурсами, відступами, порівняннями, старовинними задачами. Роль математики в різні часи оцінювали по-різному. Одні вчені розглядали її як інструмент для інженерів і науковців, інші як засіб для розвитку логічного мислення. Тепер бажано дивитись на неї ширше: історія математики є частиною історії культури. Вона знайомить учнів з фактами культурного життя людства, демонструє тернистий шлях вчених та їх теорій до повного визнання та сприйняття сучасниками чи, можливо, лише наступними поколіннями. Математичні поняття, відношення та теорії завдяки історичній динамічності стають ближчими і зрозумілішими учням.

Виклад історичних відомостей не може бути відірваним від самої математики. Історичні екскурси можна пропонувати учням на різних етапах уроку і з різною метою. Перед викладенням нової теми – *з метою мотивації чи підвищення інтересу до її вивчення,* в процесі вивчення теми – *як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів,* після вивчення і закріплення теми – *з метою систематизації та узагальнення вивченого матеріалу.*

Великі можливості для знайомства з елементами історії математики відкриваються перед учнями на позакласних заняттях. Це робота в математичних гуртках, самостійна робота з додатковою літературою для написання рефератів, виступи з доповідями перед молодшими школярами, роз’язування цікавих історичних задач тощо. Приклади з життя видатних вчених стимулюють навчально-пізнавальну діяльність учнів і надихають їх на творчу роботу. Студентів необхідно знайомити з такими прикладами, які б вони могли використати в своїй педагогічній роботі. Ось один з них.

Перше своє дослідження видатний український математик Георгій Вороний зробив у 16 років, будучи ще гімназистом. Сталося це так. В 1884 році відомий математик і педагог, тоді ще молодий професор Київського університету, Володимир Єрмаков почав видавати в Києві «Журнал елементарної математики», в якому пропонувалась для висвітлення така тема: «Розклад многочленів на множники, побудований на властивостях коренів квадратного рівняння». Як з'ясувалося, на запропоновану тему редакція отримала лише одну роботу, а саме – з Прилук від Г.Вороного. У 1885 році в журналі була надрукована його перша стаття, де крім розв'язання поставленої задачі, наводилась значна кількість прикладів.

Використання історичного матеріалу «гуманізує» і «гуманітаризує» шкільну математику. Думка, що історичний матеріал забирає багато часу, є хибною. Відомості з історії математики пожвавлюють уроки, дають можливість більш грунтовно і свідомо засвоювати математичні поняття, створюють правильне уявлення про математику, як науку, що постійно розвивається.

Ознайомлення майбутніх вчителів з історією розвитку вітчизняної математики набуває особливої актуальності на сучасному етапі, коли Україна стала незалежною державою і відбувається процес перегляду деяких історичних фактів. Остання лекція будується з врахуванням сучасного підходу у висвітленні питань історії. Зокрема:

- донедавна нашу історію викривляли на користь позиції Сходу, мало писали про античну математику Ольвії, Херсонесу, усього Українського узбережжя; замовчувався розвиток і становлення середньовічних університетів у Європі. Ще в XIV столітті існував Краківський університет з математичним факультетом. Там працювало немало і українських професорів, навчалися студенти із 70 українських міст, адже саме туди доходили землі, населені українцями.

- замовчувалися базиліанські школи – школи католиків на території України, у яких математика викладалась на досить високому рівні;
- усіх українських математиків, зокрема М.В.Остроградського, В.Я.Буняковського, Г.Ф.Вороного, вважали раніше російськими;
- замовчувалися репресовані українські радянські математики М.П.Кравчук, М.А.Чайковський та інші.

Майбутній вчитель математики має бути добре ознайомлений з життєвим шляхом, науковою творчістю і здобутками українських вчених-математиків.

Найвидатніший український математик XIX століття – Михайло Васильович Остроградський (1801-1862). Походив він з відомого українського козацько-старшинського роду, народився на Полтавщині, тут пройшли його дитячі і шкільні роки, в рідному селі Пашенній його і поховано. Розмовляв дома українською мовою, а коли говорив російською чи французькою, то з досить помітним українським акцентом. Його улюбленим письменником був Т.Шевченко, який писав про їх зустріч: «Великий математик прийняв мене з розкритими обіймами, як земляка і сім’янина, що кудись надовго відлучився. Спасибі йому».

Математиком Остроградський був першої величини, визнаний в усьому світі. Його обрали академіком найвідоміших академій наук: в Петербурзі (1830), Нью-Йорку (1834), Турині (1841), Римі (1853), членом-кореспондентом Паризької АН (1856) та ін. Він насамперед відомий, як першовідкривач багатьох досить важливих математичних теорем і методів. Його прізвище часто згадується в математичному аналізі, механіці та інших прикладних науках. На жаль не завжди, коли слід би згадувати. Через непорозуміння досі говорять про теорему Ліувілля, метод Карно, принцип Рімана, хоч пріоритет у цих і деяких інших відкриттях належить Остроградському.

Введення функцій в середні школи більшість зарубіжних методистів пов’язують з німецьким математиком Ф.Клейном. Хоча М.Остроградський запропонував ввести поняття функції у програми середніх шкіл на півстоліття раніше. Ще в середині XIX століття він висловив ідеї, які пізніше лягли в основу міжнародного руху за реформу викладання математики в школі. Його учень В.Н.Шкляревич у 1865 році опублікував статтю «деякі міркування про метод викладання початкової математики», в якій стверджував, що поліпшити викладання алгебри в школі можна тільки насиченням курсу алгебри елементами вчення про функціональну залежність. Тут він не лише розкрив загальноосвітнє і практичне значення поняття функції і її графічного зображення, а й запропонував систему вправ і навіть дав ряд конкретних методичних вказівок.

Ще понад сто років тому М.Остроградський пропонував використовувати в навчальному процесі синоптичні таблиці. «Це дуже коротке резюме того, що вони знають. Візьмемо для прикладу геометрію: в центрі синоптичної таблиці знаходяться основні фігури, розташовані в порядку і послідовно в прямокутній рамці. Навколо цієї рамки написані основні визначення, виміри плоских фігур і простіших тіл. Ось все, що необхідно для того, щоб зафіксувати назавжди в пам'яті заняття, проведене на першому ступені навчання з геометрії. Дитина, у якої перед очима буде перша таблиця, яку вона замалювала два або три рази, потім відтворила в пам'яті … запам'ятає назавжди те, що вона вивчила». Та це ж «опорні конспекти»! А вчителі вважають, що «опорні конспекти» були «відкриті» тільки недавно.

Потребують уважного вивчення і широкої популяризації наукові праці геніального українського математика Георгія Феодосійовича Вороного (1868-1908), якого не без підстав вважають найбільшим арифметиком кінця XIX початку XX століття. Наукові праці Г.Вороного головним чином стосувалися теорії чисел. Друкованих робіт у нього було небагато – дванадцять, – але вони послужили поштовхом для виникнення кількох нових напрямків у аналітичній теорії чисел і алгебраїчній теорії чисел та створенні (разом з Г.Мінковським) геометричної теорії чисел.

Справжньою гордістю української математики є його робота «Дослідження про примітивні паралелоедри», надрукована у відомому математичному «Журналі Крелля». Вона стала продовженням досліджень відомого кристалографа Є.Федорова і мала прямий зв'язок з кристалографією. У ній Г.Вороний розглядає заповнення n-вимірного евклідового простору однаковими паралельно розміщеними опуклими многогранниками – паралелоедрами. Серед них виділено клас примітивних паралелоедрів, – таких, у кожній вершині яких сходиться найменше число цих просторових тіл, тобто n+1. Вороний знайшов алгоритм, за яким для кожного n можна побудувати всі примітивні паралелоедри.

Результати досліджень та методи їх одержання і досі привертають увагу вчених усього світу. Б.Делоне дав цій роботі таку оцінку: «Мемуар Вороного про паралелоедри – одне з найглибших досліджень у галузі геометрії чисел в усій світовій літературі, а своєрідність методів чисто геометричної першої частини накладає на мемуар відбиток геніальності».

Потреба розбиття простору на окремі клітини для математичного опису певних процесів виникає в сучасних дослідженнях у найрізноманітніших галузях знань: астрономії, астрофізиці, радіаційній фізиці, фізичній хімії, мікробіології, офтальмології тощо. Добре відомі поняття «область Діріхле» («Dirichlet domain») в математиці, «многокутник Тісссена» («Thiessen polygon») у географії, «клітина Мейєрінга» («Meijering cell») в металургії, «S-мозаїка» («S – mosaic») в екології, «клітина Вігнера-Зейтса» («Wigner-Seitz cell») у кристалографії. Тепер термінологію уніфіковано: загальновизнаними в світовій науці стали терміни «клітина Вороного», «мозаїка Вороного», «розбиття Вороного». Вони виявились найбільш довершеними за формою та пріоритетними в часі.

У 1975 році діаграми Вороного введено в теоретичну комп'ютерну науку і з того часу їх використовують у конструкціях, пов'язаних з геометричними алгоритмами. Деякі фахівці навіть вважають, що саме з цього моменту започатковано комп'ютерну геометрію. Діаграми Вороного використовуються також у комп'ютерній графіці, геометричному моделюванню, конструюванні роботів, розпізнаванні образів, побудові географічних інформаційних систем.

Діаграми Вороного використовуються у багатьох наукових центрах світу. Цьому математичному об'єкту присвячено сотні статей. В Англії поняття про діаграми Вороного вводять навіть у програму шкільної освіти. В 1992 році у видавництві John Wiley and Sons (Англія) видано монографію A.Okabe, B.Boots, K.Sugihara «Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoy Diagrams» («Просторові мозаїки: Поняття та застосування діаграм Вороного», 534 с.).

Використанню сучасними дослідниками методу Г. Вороного був присвячений цикл лекцій «Клітини Вороного та їх роль у сучасній математиці та природознавстві», які в березні 1998 р. прочитала в Києві в Інституті математики професор з Великобританії М.Сенешаль, відомий фахівець з питань геометрії чисел. Зрозуміло, що в курсі історії математики бажано зупинитися на відкритті Великого українського математика.

Наш досвід роботи показує, що хронологічний принцип доцільно зберегти лише для лекційного курсу. Семінарські заняття краще будувати не на хронологічній основі, а відповідно до розділів математики, що вивчаються в школі. Окремі семінарські заняття ми проводимо за темами, присвяченими становленню та розвитку арифметики, алгебри, геометрії, математичного аналізу. Розглядаємо також питання сучасної математики (теорія ймовірностей, математична статистика, топологія, фрактальний аналіз тощо). Деякі з цих тем вже ввійшли у шкільні програми, а інші – думається – ввійдуть у недалекому майбутньому.

Одним з напрямів сучасної математики є теорії фракталів. Зовнішня краса, складність внутрішньої будови, широке застосування в різних галузях математики і далеко за її межами вимагає розгляду питань, пов’язаних з історією виникнення і розвитку фракталів на одному з семінарських занять.

Слово «фрактал» походить від латинського кореня fractus, що означає: ломаний, той, що складається з частин. Вперше поняття «фрактал» введено Б.Мандельбротом в його роботі «Фрактали: форма, випадок, розмірність» (1975), де теорія фракталів використовується для пояснення багатьох явищ природи і наголошується, що досить часто саме фрактали виступають найбільш адекватними і природніми моделями реальних об’єктів.

Як класичний приклад фракталів на семінарському занятті розглядається «сніжинка Коха». Знання її властивостей дозволяє досить просто використовувати цей об’єкт у шкільному курсі математики (ШКМ), розгядаючи різні види послідовностей та їх властивості.

На кожному занятті, крім традиційного висвітлення питань з теми, рекомендуємо відображати вивчені відомості на матеріал ШКМ та розв'язувати відповідні історичні задачі. Останнє семінарське заняття повністю присвячуємо використанню елементів історії математики в навчальному процесі. Наведемо план цього заняття.

Використання історизмів у ШКМ

1. З історії проблеми: а) аналіз методичної літератури; б) аналіз літератури з історії математики; в) аналіз шкільних програм, підручників та навчальних посібників.

2. Роль та місце елементів історії у викладанні математики в сучасних умовах.

3. Історичні відомості та методика їх використання на уроках математики: а) 5-6 класи; б) алгебра основної школи; в) алгебра і початки аналізу; г) геометрія.

4. Історичні задачі в шкільному курсі математики.

5. Використання історичних відомостей у позакласній роботі.

Було б непогано традиційний курс історії математики для вчителів доповнити відомостями про розвиток української методики математики, історією розвитку передових педагогічних ідей, методів і засобів шкільної математики.

Ефективність засвоєння навчальної дисципліни старших курсів у значній мірі залежить від потреби і можливості застосовувати отримані знання на практиці і, зокрема, в подальшій роботі вчителя. З цією метою ми пропонуємо студентам включати в кваліфікаційні роботи історичні аспекти проблеми дослідження. Щоб прищепити студентам звичку використовувати знання з історії математики в навчальному процесі, пропонуємо кожному студенту індивідуальну розрахунково-графічну роботу, яка полягає в розробці фрагментів уроків з використанням історизмів та розв'язанні історичних задач.

Курс історії математики дає можливість усвідомити майбутньому вчителю гуманітарний потенціал математичних дисциплін і ефективно реалізувати його в педагогічній діяльності.

Резюме. Предлагаемая статья посвящена специфике курса «история математики» в педагогическом университете. Рассмотрены вопросы выбора содержания и построения лекционного курса и семинарских занятий. Особое внимание уделено использованию исторического материала учителем математики в учебном процессе: значение, место, цель и др. Приведены конкретные факты о деятельности выдающихся украинских математиков М.Остроградского и Г.Вороного.

Summary. This artical is devoted to specific character of «Math History» course in the pedagogical university. Quastions of choice of a contents and a construction of the lecture course and seminar classes are considered. The special attantion is given to historical material use of math teacher in the learning process: mean, place, aim and so on. Facts about work of prominent ukrainian mathematicions, M.Ostrogradsky and G.Voronoy are propoused.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИКЛАДАННЯ ЙМОВІРНОСТІ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Г.В.Акулов, канд.пед. наук, доцент,
Національний пед університет ім.М.П.Драгоманова, м.Київ

Тема «Початки теорії ймовірностей» в курсі алгебри і початків аналізу 10-11 класу [1] займає особливе положення в логічній будові шкільного курсу математики. Специфічні теоретичні основи нових понять, пов'язаних з поняттям ймовірності вимагають створення якісної сучасної системи методичного забезпечення навчального процесу [2]. Для успішного засвоєння теми учні повинні володіти поняттям множини, вміти виконувати найпростіші дії над множинами, бажано, щоб їм вже були відомі найпростіші комбінаторні формули і закріплені навички їх застосування до розв'язування задач.

Вступ до теми доцільно побудувати на поєднанні історичного, природничого і сучасного технічного аспектів. Кількох цікавих фактів з історії виникнення і розвитку теорії ігор, разом з нескладними ілюстраціями випадкових подій і процесів у живій природі, суспільстві, техніці, буде цілком достатньо. Слід звернути увагу, що більшість природних явищ пов'язані з елементами випадковості. Можна, наприклад, розглянути шлях дощової краплини, явища її утворення і зникнення. Зрозумілими учням будуть приклади, пов'язані з випадковим розміщенням пасажирів на ескалаторі метрополітену, випадковим надходженням повідомлень до комп`ютера з необмеженої мережі тощо. Вдало побудований вступ сприяє зосередженню уваги учнів для сприйняття нового матеріалу.

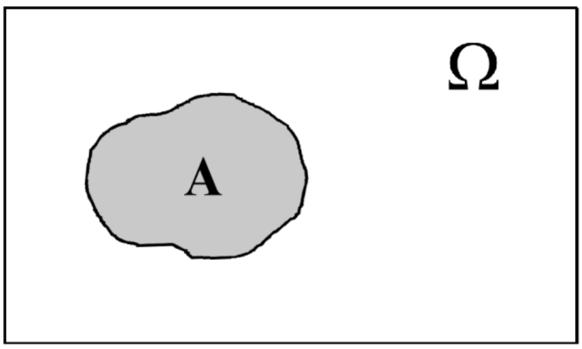
На першому етапі слід виділити базові поняття теорії ймовірностей: стохастичний експеримент, простір елементарних подій, випадкова, вірогідна і неможлива події, несумісні події, повна група подій. Обов'язковість засвоєння такої значної кількості нових понять ставить певні вимоги і до необхідних обсягів навчального часу і до інтенсивності роботи в класі. Під час пояснення нового матеріалу важливу роль відіграє наочність. Теоретико-множинний підхід до інтерпретації нових понять дозволяє ілюструвати їх традиційними діаграмами.

Наступна таблиця допоможе вчителю орієнтуватися в еквівалентних термінах технічної і математичної мови.

Таблиця 1.

Технічна назва	Математична назва, що використовується в теорії ймовірностей
Випробування, або експеримент, який можна повторювати будь-яку кількість разів, але результат якого не можна напевно передбачити.	Стохастичний експеримент
Сукупність усіх можливих результатів експерименту, випробування	Простір елементарних подій– множина Ω, яка також називається вірогідною подією
Певний результат експерименту, що вивчається, досліджується	Випадкова подія – деяка підмножина A простору елементарних подій Ω ($A \subseteq \Omega$)
Результат, який у даному експерименті за жодних умов з’явитися не може	Неможлива подія – порожня множина $\varnothing$

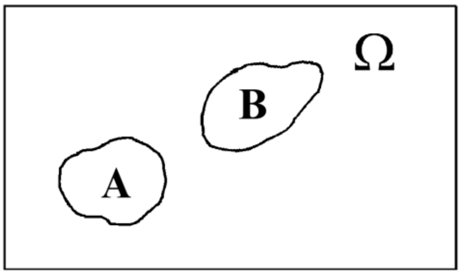
Проілюструвати поняття простору елементарних подій (вірогідну подію) Ω та випадкової події A можна за допомогою діаграм, наприклад так, як подано на мал.1.

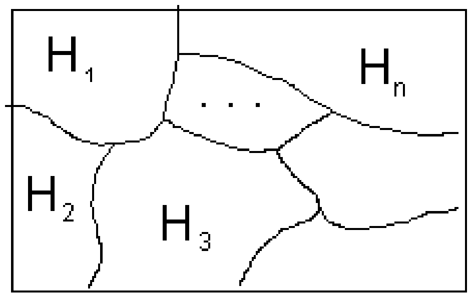


Мал.1

Неможлива подія	Випадкова подія	Вірогідна подія
$\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$		
Порожня множина	Деяка підмножина	Простір елементарних подій

Для ілюстрації понять несумісні події (A і B) та повна група подій ($H_1, H_2, \ldots, H_n$), доречними будуть діаграми, подані на мал.2-3.





Мал.2.

Події A і B – несумісні.

$$A \cap B = \varnothing$$

Мал.3.

Події H_1, H_2, …, H_n утворюють повну групу подій.

1) $H_i \cap H_j = \varnothing,\ i \neq j$

2) $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$

Разом з прикладами і завданням з §§1-2 і в кінці розділу XIII підручніка [1] в класі можна виконати завдання подібні до наведених нижче.

Завдання 1. Технічний експеримент полягає в тому, що електронна система фіксує випадковим чином три послідовних сигнала «0» або «1». Результатом експерименту вважається впорядкований запис, складений з трьох символів «0» або «1».

1) Побудувати простір елементарних подій Ω;

2) Знайти підмножини простору елементарних подій, що відповідають випадковим подіям з таблиці 2 (заповнити третій стовпчик таблиці);

3) Серед випадкових подій A,B,C,D,E виділити:

а) неможливі й вірогідні події;

б) (серед подій A,B,C,D,E) пари несумісних подій.

Таблиця 2.

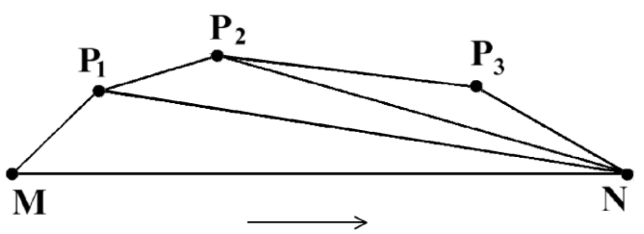
Випадкова подія	Полягає в тому, що одержана послідовність містить	Відповідна підмножина простору елементарних подій
A	Не менш як два символи «0»	
B	Не менш як два символи «1»	
C	На перших двох позиціях символ «1»	
D	Лише один символ «0», причому на першій або другій позиціях	
E	Не більше трьох символів «0» або «1»	
F	Більше трьох символів «1»	

4) Серед випадкових подій, описаних в таблиці 2, визначити події, які утворюють повну групу подій.

Завдання 2. Ігровий експеримент. Прогулянка в парку здійснюється за схемою (мал. 4) в напрямі зліва направо від т.М до N. Вибір одного з двох можливих шляхів кожного разу випадковий (наприклад, за допомогою підкидання монети). Результатом експерименту вважатимемо кількість проміжних пунктів (з P_1, P_2 та P_3) через які пройде маршрут прогулянки.

1) Побудувати простір елементарних подій;

2) Знайти підмножини Ω, що відповідають випадковим подіям з таблиці 3 (заповнити третій стовпчик таблиці);



Мал.4

Таблиця 3

Випадкова подія	Полягає в тому, що кількість пунктів, через які пройде маршрут прогулянки, буде	Відповідна підмножина простору елементарних подій
A	не більше як 1	
B	не більше як 4	
C	рівно 2	
D	рівно 4	
E	не менше як 2	
F	рівно 3	

3) Які випадкові події з таблиці 3 є неможливими, вірогідними?

4) Серед подій A,B,C,D,E,F знайти пари несумісних подій;

5) Серед подій, описаних в таблиці 3, визначити події, які утворюють повну групу подій.

Завдання 3. (Можна запропонувати виконати самостійно). Лінгвістичний експеримент. Словосполучення «Логарифмічна функція» поділено на склади і навмання вибирається один склад. Результатом експерименту вважається запис вибраного складу.

1) Побудувати простір елементарних подій (множину Ω);

2) Знайти підмножини Ω, що відповідають випадковим подіям з таблиці 4, заповнити третій стовпчик таблиці;

3) Які випадкові події з таблиці 4 є неможливими, вірогідними?

Таблиця 4.

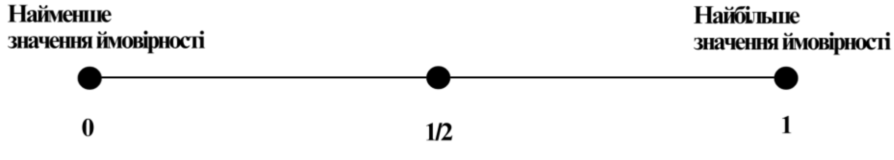
Випадкова подія	Полягає в тому, що запис вибраного складу містить	Відповідна підмножина простору елементарних подій
A	букву «Ф» або «М»	
B	букву «С»	
C	одну або дві букви	
D	не більше як 4 букви	
E	чотири букви	
F	букву «Ч»	

4) Які з подій A, C, D, E, F є несумісними?

5) Серед випадкових подій, описаних в таблиці 4, визначити події, які утворюють повну групу подій.

Зрозуміло, що реалізувати в повному обсязі в умовах стислого обсягу навчального часу практично досить важко. Тому можна уникнути повторень однотипних запитань у завданнях 1-3, вибираючи із запропонованих запитань різні за типом до кожної вправи.

На другому етапі формується уявлення про те, що за допомогою ймовірності вимірюється «можливість» випадкової події. Шкала для такого «вимірювання» (межі, в яких змінюється ймовірність) – відрізок числової осі [0; 1].



Тут слід відзначити для учнів також, що існує і статистичний підхід до означення ймовірності. Основним практичним завданням цього етапу є навчити учнів користуватись формулою класичного визначення ймовірності $P(A)=\frac{m}{n}$ для розв`язування нескладних задач.

Розглядаючи особливі «крайні» випадки $P(A)=0$ і $P(A)=1$ слід пам`ятати, що в загальному випадку мають місце лише такі твердження:

якщо А – неможлива подія $\Rightarrow$P(A)=0,

якщо В – вірогідна подія $\Rightarrow$P(B)=1.

Зворотні імплікації можуть виконуватись лише при певних умовах, і в загальному розумінні є хибними.

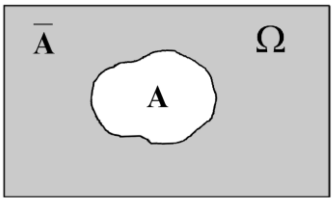
Корисними для розв'язування на уроці будуть задачі 1 і 2 з §3 і вправи 1 і 3 в кінці розділу XIII [1].

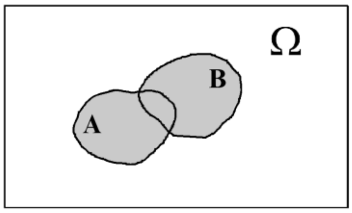
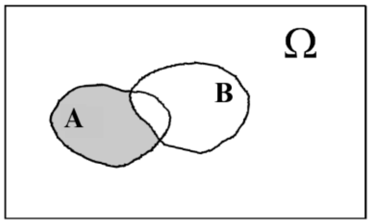
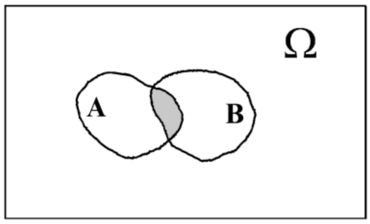
Третім етапом є вивчення операцій над випадковими подіями та теорем додавання і множення.

Теоретико-множинну інтерпретацію дії над випадковими подіями і відповідні змістові характеристики доцільно поєднати за допомогою таблиці 5 [3].

Звернувши увагу на існування двох різних позначень для операцій суми і добутку випадкових подій, слід вибрати зручніше і надалі користуватись одним позначенням.

Таблиця 5.

Назва операції	Позначення	Змістова характеристика	Теоретико-множинна інтерпретація
Подія, проти-лежна А	$\overline{A}$	Відбувається тоді, і лише тоді, коли подія А не відбувається	 доповнення множини А – множина $\overline{A}$

Сума подій А і В	А+В або $A \cup$	Відбувається тоді, і лише тоді, коли відбувається або подія А, або подія В	 об`єднання множин А і В – множина $A \cup$
Різниця подій А і В	$A \setminus B$	Відбувається тоді, і лише тоді, коли відбувається подія А і не відбувається подія В	 Різниця множин А і В – множина $A \setminus B$
Добуток подій А і В	$A \cdot B$ або $A \cap$	Відбувається тоді, і лише тоді, коли відбувається і подія А, і подія В	 Перетин множин А і В – множина $A \cap$

Формулу для обчислення ймовірності суми випадкових подій, на мій погляд, краще викладати, починаючи із загального випадка: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р($A \cdot B$) з подальшим формуванням її окремого випадка для несумісних подій А і В ($A \cdot B$ =∅) : Р(А+В)=Р(А)+Р(В) і для випадка $A = C$, $B = \overline{C}$ $P(\overline{C}) = \; - P(C)$.

Складаючи систему вправ і задач потрібно слідкувати за тим, щоб всі основні поняття та положення, що вивчалися мали в ній «пропорційне і рівномірне» представлення .

1. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. – К.,1998
2. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Про введення ймовірностно-статистичной змістовної лінії в шкільний курс математики // Математика в школі. – 2000. – №4.
3. Ядренко М.Й., Дороговцев А.Я., Скороход А.В. Теорія ймовірностей. Збірник задач. – К.: Вища школа, 1976.

Резюме. В статье приведены теоретико-методические основы преподавания вероятности в старших классах общеобразовательной школы, ориентированные на аксиоматический подход к определению основного понятия.

Summary. The article deals with theoretical and methodical base of teaching probability at high school. The principles orientate towards acsiomatical approach to determination of main conception. There are test goals and self-tested sets in this work.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ И ШКОЛЬНИКОВ

М.З.Двейрин, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Донецкий национальный университет

Ознакомление учащихся общеобразовательной школы с элементами математического моделирования очень важно для формирования у них правильного представления о роли математики в развитии других наук. Помимо этого, математическое моделирование связывает их знания в области математики, других школьных предметов и возможности компьютера в единое мощное средство решения практических задач, способствует реализации прикладной направленности школьного курса математики. Математическое моделирование применительно к конкретной прикладной задаче можно разделить на три этапа, отличающихся целями, способом рассуждений и используемыми знаниями (деление, конечно, условное и неполное, но далее оно будет дополнено). Это:

- перевод задачи с естественного языка той области, где она возникла на язык математики;
- решение полученной математической задачи;
- интерпретация полученных результатов, т.е. перевод задачи с языка математики обратно на язык той области, где она возникла.

При изучении математики в школе внимание уделяется, главным образом, приобретению знаний и навыков, необходимых на втором из указанных этапов. В то же время применение математики к прикладным задачам невозможно без приобретения навыков перевода их на язык математических терминов и соотношений. Также важно научиться интерпретировать полученные результаты. В настоящее время ознакомление с математическим моделированием предусматривается программой в специализированных школах и классах с углубленным изучением математики. Однако изучение элементов математического моделирования в школе затруднено ввиду отсутствия хорошей литературы по этой теме. Реально приходится довольствоваться текстовыми задачами, которые лишь в малой мере учат математическому моделированию, поскольку возникающие в них ситуации стандартны (равномерное движение; работа с постоянной интенсивностью; движение двух объектов в одном или противоположных направлениях и т.д.) и учащиеся не строят в процессе решения математические модели, а используют уже наработанные штампы. Безусловно, знать их учащемуся полезно, как, скажем, таблицу умножения. Но так же, как знание таблицы умножения не равносильно умению умножать любые числа, так и модели простейших типичных ситуаций являются лишь элементарными кирпичиками, на базе которых нужно учиться строить математические модели различных явлений. Сложность подбора материала по указанной теме вызвана тем, что в имеющейся специальной литературе, как правило, построение математической модели является лишь промежуточным этапом при изложении применений интеграла и производной, методов решения дифференциальных уравнений, симплекс-метода и т.д. Поэтому использование изложенных в литературе прикладных задач требует изложения материала в другом ракурсе – с акцентом на аспекты, присущие математическому моделированию. Кроме того, на наш взгляд целесообразно излагать материал в форме задач-проблем, в которых может отсутствовать часть данных, а постановка максимально приближена к той, с которой сталкивается математик-прикладник в своей деятельности. Автором разработан спецкурс «Элементы математического моделирования» в двух версиях – для школьников и для студентов – будущих преподавателей математики. Понятно, что в полном объеме он вряд ли может быть прочитан в какой-либо школе. Но ведь даже в самом лучшем и любимом сборнике задач учитель решает с учащимися далеко не все задачи и даже не из всех разделов, а выбирает то, что ему нужно в конкретной ситуации. Предлагаемый материал состоит из нескольких блоков, каждый из которых может быть независимо включен в курс, что позволяет использовать его в условиях различного количества часов, имеющихся для изучения данной темы. Спецкурс может быть использован в работе со школьниками в качестве дополнительного курса либо факультатива, а также отдельные задачи-проблемы из него могут быть изложены при изучении соответствующих тем на уроках физики и т.д. Изложение математических моделей сопровождается в нем контрольными вопросами и задачами для самостоятельного решения. Построение моделей излагается с акцентированием внимания на основных (типичных) этапах и приемах построения моделей. Изложенные математические модели разнообразны по характеру моделируемых явлений. Выбор материала, вошедшего в курс, производился с учетом его способности поразить воображение учащихся неожиданными возможностями применения математики и содержательностью получаемых результатов.

Это позволяет активизировать учащихся, вовлечь их в построение математической модели, придать этому процессу творческий характер. Используемый математический аппарат доступен ученикам 11-го (а большая часть и 10-го) класса. Спецкурс неоднократно читался студентам ДонНУ (48 часов) и учащимся математического класса лицея при ДонНУ (32 часа, соответствующая версия) и хорошо воспринимался ими. Предлагаемая статья представляет собой фрагмент курса и может использоваться как учащимися, так и преподавателями. В тексте статьи имеются комментарии, предназначенные для педагогов. В дальнейшем планируется продолжение публикации материалов спецкурса «Элементы математического моделирования». В настоящее время работа над курсом продолжается, в первую очередь, над подбором контрольных вопросов и заданий для самостоятельного решения.

1. Почему деревья не растут до неба?

Зададим себе вопрос – какой высоты могут быть деревья? Ясно, что речь идет о наибольшей возможной высоте деревьев. Если мы попытаемся вместе вспомнить, что нам об этом известно, то, в конце концов, кто-то назовет гигантские секвойи, растущие в Северной Америке, высота которых может превышать100 метров. Но ведь мы знаем, что высота дерева зависит от условий, в которых оно растет. И если какому-то дереву создать идеальные условия для роста (благоприятный климат, достаточное количество влаги и питательных веществ), то оно должно вырасти выше других деревьев той же породы. Так почему бы ему не достичь высоты, скажем, в 500 метров? Возможно ли этого достичь, создавая дереву благоприятные условия, или это невозможно в силу каких-то причин? И каких именно?

То, что Вы прочли в предыдущем абзаце – это, как ни удивительно, задача! Правда, задача не математическая, но она вполне может интересовать биолога, и даже нетрудно представить ситуацию, в которой она будет иметь важное практическое значение. Но как ее решить? Если вы попытаетесь получить ответы на поставленные вопросы у специалиста – биолога, то вы, скорее всего, поставите его в затруднительное положение. Наоборот, биолог, если перед ним встанет подобная проблема, придет за помощью к математикам. А если он все же обрадует Вас ответом, то это только потому, что эта задача решена ранее и ему просто известен ответ.

Но все же, как решить эту задачу? Математику легче проявить свои возможности, имея перед собой привычный объект для исследования – математическую задачу. Вот мы и попытаемся придумать такую математическую задачу, решив которую сможем получить ответы на все поставленные вопросы. Для этого прежде всего введем характеристику, в терминах которой мы сможем судить, растет ли еще дерево или уже нет и насколько оно велико. Для этого нам удобно взять высоту дерева. Высота дерева меняется со временем, следовательно, как математический объект это функция от времени $x = x(t)$. Кстати, прекращение роста дерева мы легко сможем обнаружить по поведению $x(t)$ – в этом случае ее производная станет равной нулю.

Неизвестные величины мы обычно находим из уравнений. Хорошо бы нам и сейчас составить уравнение, в которое бы вошла наша неизвестная функция $x(t)$. Для этого нужно знать, какие закономерности присущи процессу роста дерева. Здесь нам сможет помочь специалист-биолог. Правда, он знает о деревьях слишком много, чтобы мы могли все выслушать, поэтому нам нужно суметь получить полезную информацию, не утонув в ее потоке. Для этого очень полезны опыт и хорошая интуиция. Ухватимся за закон сохранения энергии – по сведениям, полученным от биолога, дерево получает энергию от Солнца и расходует ее на процесс фотосинтеза, на рост и на питание. Всеми другими источниками энергии и ее затратами можно (и придется!) пренебречь. И вот уже у нас есть уравнение

$$E = E_{фс} + E_{пит} + E_{рост} \quad , \qquad (1)$$

где E – вся энергия, получаемая деревом от Солнца;

$E_{фс}$ – энергия, расходуемая на фотосинтез;

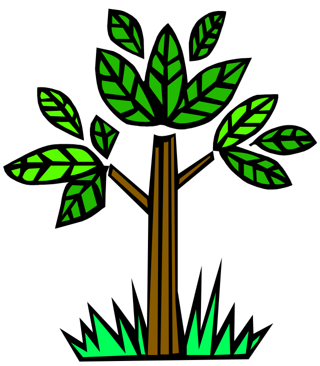
$E_{пит}$ – энергия, расходуемая на обеспечение клеток питанием;

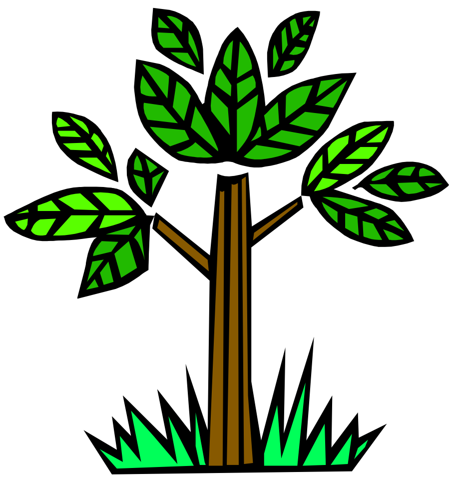
$E_{рост}$ – энергия, расходуемая на рост дерева.

Мы получили уравнение, которое при всех его математических достоинствах (прежде всего, простоте) имеет один, но очень существенный недостаток – в нем не присутствует наша неизвестная функция $x(t)$. К счастью, все слагаемые в уравнении (1) несомненно зависят от высоты дерева (они тем больше, чем больше $x(t)$), поэтому стоит попытаться втащить функцию $x(t)$ в уравнение, выразив через нее члены уравнения. Поскольку, согласно объяснению специалиста, дерево получает энергию через листья, расходуя часть ее на фотосинтез, то количество получаемой деревом энергии прямо пропорционально площади освещенной поверхности листьев. К такой догадке мы приходим, выполнив мысленный эксперимент с двумя одинаковыми деревьями. Каждое из них получит одинаковое количество энергии, а вместе они получат вдвое больше, чем одно из них (придумайте другой, свой эксперимент, приводящий к такому же выводу). Поэтому

$$E = k_1 S(t), \tag{2}$$

где k_1 – положительная постоянная (коэффициент пропорциональности); $S(t)$ – площадь освещенной поверхности листьев. Следующий шаг – выразить $S(t)$ через высоту дерева – нам, математикам, сделать легче.





На этих рисунках изображено одно и то же дерево в возрасте t_1 и в возрасте t_2 лет $(t_1<t_2)$. Тот факт, что крона зрелого дерева мало изменяется по форме, увеличиваясь лишь в размерах, наводит на идею – воспользоваться подобием. Будем рассматривать дерево в возрасте t и в некотором другом фиксированном возрасте t_1 как два подобных тела. Поскольку у подобных тел площади поверхностей пропорциональны квадратам линейных размеров, то

$$\frac{S(t)}{S(t_1)} = \frac{x^2(t)}{x^2(t_2)}, \text{ откуда } S(t) = \frac{S(t_1)}{x_2(t_1)} x^2(t) = k_2 x^2(t), \qquad (3)$$

где $k_2 = \dfrac{S(t_1)}{x_2(t_1)}$ – положительная постоянная. Из равенств (2) и (3) получаем

$$\text{E} = k_1 k_2 x^2(t) = \alpha x^2(t). \qquad (4)$$

Мы обозначили $\alpha = k_1 \cdot k_2$, поскольку приятнее иметь одну неизвестную пока нам постоянную α вместо двух неизвестных k_1 и k_2. Аналогично будем поступать и в дальнейшем. Теперь найдем выражение для зависимости от высоты дерева энергии, расходуемой им на фотосинтез. Поскольку реакция фотосинтеза происходит в листьях под воздействием энергии, получаемой от солнца, то количество энергии, расходуемой на фотосинтез, также пропорционально площади поверхности листьев и, следовательно,

$$\text{E}_{\text{фс}} = k_3 S(t) \qquad (5)$$

со своим коэффициентом пропорциональности k_3. Используя равенство (3), получаем $\text{E}_{\text{фс}} = k_3 k_2 x^2(t) = \beta x^2(t)$. (6)

Так как на фотосинтез расходуется лишь часть получаемой от солнца энергии, то $\alpha > \beta$ (попробуйте найти другое рассуждение, позволяющее получить выражение для $\text{E}_{\text{фс}}$ быстрее).

Энергия $\text{E}_{\text{пит}}$, расходуемая на доставку клеткам дерева питательных веществ, тем больше, чем из большего количества клеток состоит дерево, т.е. чем больше его объем $V(t)$ и чем больше дальность транспортирования $h_{cp}(t)$ (средняя высота, на которую нужно поднять всю массу питательных веществ). Но это качественный характер зависимости Е$_{пит}$ от высоты дерева, а нам нужна количественная зависимость между ними. Ее вновь можно выяснить путем мысленного эксперимента. Представив себе два одинаковых дерева, мы сразу поймем, что для обеспечения их клеток требуется вдвое больше питательных веществ и, следовательно, энергии, чем для каждого дерева в отдельности и что вообще расход энергии на обеспечение клеток питанием прямо пропорционален объему дерева. А представив себе два дерева с одинаковым количеством клеток и отличающейся вдвое высотой, мы заметим, что затраты на доставку 1 кг питательных веществ прямо пропорциональны средней высоте доставки. Следовательно,

$$E_{пит} = k_4 V(t) h_{cp}(t) \tag{7}$$

с некоторым положительным коэффициентом k_4. Чтобы выразить объем через высоту дерева, вновь используем подобие (объемы подобных тел относятся как кубы соответствующих линейных размеров):

$$\frac{V(t)}{V(t_1)} = \frac{x^3(t)}{x^3(t_1)}.$$

Из этой пропорции находим $V(t) = \dfrac{V(t_1)}{x^3(t_1)} x^3(t) = k_5 x^3(t)$, $k_5 > 0$. (8)

Средняя высота $h_{cp}(t)$ ввиду подобия также прямо пропорциональна высоте, поэтому

$$\frac{h_{cp}(t)}{h_{cp}(t_1)} = \frac{x(t)}{x(t_1)}, \qquad h_{cp}(t) = k_6 x(t).$$

Подставляя выражения для $V(t)$ и $h_{cp}(t)$ в (7), получим

$$E_{пит} = k_4 k_5 x^3(t) k_6 x(t) = \gamma x^4(t). \tag{9}$$

Теперь выразим через высоту дерева $E_{рост}$. Очевидно, затраты энергии у дерева на рост тем больше, чем он интенсивнее. Рост дерева можно представить как процесс формирования новых клеток, влекущий за собой увеличение его объема, а интенсивность роста – скорость изменения объема дерева. Поскольку скорость изменения функции – это ее производная, то интенсивность роста дерева равна $V'(t)$. Очередной мысленный эксперимент подскажет нам, что затраты энергии на рост дерева прямо пропорциональны $V'(t)$. Используя равенство (8), находим

$$E_{рост} = k_6 V'(t) = k_6 k_5 \cdot 3x^2(t)x'(t) = \delta x^2(t)x'(t), \qquad (10)$$

где δ – еще одна неизвестная нам положительная постоянная. Теперь мы можем, наконец, подставить найденные выражения для различных видов потребляемой энергии в уравнение (1):

$$\alpha x^2(t) = \beta x^2(t) + \gamma x^4(t) + \delta x^2(t)x'(t)$$

или $$(\alpha - \beta) x^2(t) = \gamma x^4(t) + \delta x^2(t)x'(t). \qquad (11)$$

Равенство (11) представляет собой уравнение относительно неизвестной функции $x(t)$ (забудем на время, что нам неизвестны конкретные значения постоянных α, β, γ, δ). В нем наряду с неизвестной функцией $x(t)$ содержится также ее производная. ***Уравнения, содержащие наряду с неизвестной функцией ее производные, называются дифференциальными***. Уравнение (11) является математическим выражением скорости, с которой происходит рост дерева. Понятно, что из этого уравнения нельзя определить, какой будет высоты дерева в интересующий нас момент времени t. На высоту дерева в момент времени t влияет также его высота в момент t_0, который принят за начало отсчета. Задав начальную высоту дерева

$$x(t_0) = x_0, \qquad (12)$$

мы дополним уравнение (11) недостающим ***начальным условием***. Соотношения (11) и (12) вместе позволяют однозначно определить высоту дерева в любой момент времени t. Они дают ***описание процесса роста де-***

рева на языке математики. Такое описание процесса называется его математической моделью*, *а процесс построения математической модели называется математическим моделированием.

Теперь, когда математическая модель построена, нам нужно извлечь из нее ответ на вопрос, ради которого она строилась. Это уже сугубо математическая задача. Левая часть уравнения (11) выражает количество энергии, достающейся дереву на обеспечение всех его потребностей после фотосинтеза. Это количество растет вместе с высотой дерева как парабола второй степени $y = \iota \;\; ^2$. В правой части уравнения есть слагаемое $\gamma x^4(t)$, выражающее количество энергии, необходимой для обеспечения питанием уже существующих клеток. Оно растет вместе с высотой дерева как парабола четвертой степени $y = \,' x^4$. Поскольку парабола четвертой степени растет быстрее любой параболы второй степени, то обязательно наступит момент, когда она догонит параболу второй степени. С этого момента вся энергия будет расходоваться на обеспечение питанием клеток дерева и рост прекратится. Способность дерева получать энергию от солнца пропорциональна квадрату его высоты (поскольку процесс получения энергии протекает только на поверхности дерева, точнее, в листьях), а расход энергии пропорционален четвертой степени высоты дерева (потребляют все клетки, в том числе и те, которые находятся внутри ствола). Поэтому рост любого дерева обязательно прекращается – такова его природа. Порода дерева, условия, в которых оно растет влияют лишь на то, какой высоты оно достигнет.

Мы уже справились с поставленной задачей. Но математическая модель позволяет получить ответы и на некоторые вопросы, которые первоначально не ставились. Для этого преобразуем уравнение (11). Поскольку высота $x(t)$ положительна, мы сократим обе части уравнения и запишем его в виде $x' = \,\iota^2 - \,^2 x^2$, где мы обозначили $a^2 = \dfrac{\chi - 3}{\delta}$, $b^2 = \dfrac{'}{\delta}$. Заметим, что в процессе построения математической модели нам пришлось использовать множество постоянных, значения которых мы не знали. Сейчас наша модель может быть записана в виде

$$x' = a^2 - b^2 x^2, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{13}$$

в котором нам неизвестны лишь две постоянные. Тем самым мы значительно сократили себе объем будущей работы по определению их конкретных значений. Решая задачу (13) (этому учат в курсе высшей математики; однако проверить правильность приведенного решения можете и вы, подставив его в уравнение (13)), получим

$$x(t) = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a + bx_0)e^{2ab(t-t_0)} - a + bx_0}{(a + bx_0)e^{2ab(t-t_0)} + a - bx_0}. \tag{14}$$

Выражение (14) позволяет определить высоту дерева в любой интересующий нас момент времени. Измеряя высоту дерева в два различных момента t_1 и t_2 и приравнивая ее, сответственно, к $x(t_1)$ и $x(t_2)$ мы найдем ***параметры модели*** a и b. ***Определение конкретных значений параметров, входящих в математическую модель, называется идентификацией модели***.

В процессе построения математической модели мы неоднократно делали различные допущения, которые не были строго обоснованы, а иногда (например, гипотеза о подобии дерева самому себе) строго говоря, неверны. Так можно ли доверять построенной нами модели? На этот вопрос окончательный ответ может дать только практическая проверка модели путем сопоставления результатов расчетов с помощью модели с практическими данными. В случае, когда данные расчетов с помощью модели хорошо согласуются с опытными данными, модели можно доверять. В этом случае говорят, что модель ***адекватно*** описывает изучаемое явление (наша модель такую проверку выдержала). Это позволяет использовать ее на практике, например, для определения периода наиболее интенсивного роста деревьев (это важно для получения максимального количества древесины с участка при его эксплуатации в течение длительного периода времени) и т.д. Заметим, что понимание обоснованности выводов в математическом моделировании, на первый взгляд, существенно отличается от того, к которому мы привыкли в процессе изучения математики. Здесь можно не обосновывать свои догадки, более того, можно даже основываться на неверных посылках. Если полученная модель будет адекватно описывать изучаемое явление, то все ошибки на пути к ее построению не помешают пользоваться ею. В этом отличие от других областей математики, где нужно доказывать истинность каждого утверждения. Причина этого различия в том, что адекватность математической модели проверяется непосредственно практическим применением, а истинность теоретических фактов опосредованно, через истинность основанных на них других теорий и приложений.

Резюме. Викладено фрагмент (вступ та перша лекція) посібника з елементів математичного моделювання для школярів та студентів, що готуються стати викладачами математики у школі. Матеріал призначений для використання, у першу чергу, на заняттях гуртків та факультативів. Плануються подальші публікації.

Summary. This article deals some materials for school education in mathematical modeling.

О ПОДБОРЕ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.М.Сидорова, к.ф.-м.н., доцент,
Н.Н.Лосева, к.ф.-м.н., доцент,
Донецкий национальный университет

В основу работы положен опыт преподавания высшей математики на химическом факультете Донецкого национального университета. Задача курса – изучить основные методы высшей математики, необходимые для прохождения физики, физической химии и других общих и специальных дисциплин, а также подготовиться к самостоятельному изучению тех разделов математики, которые могут дополнительно понадобиться в практической и исследовательской работе специалисту-химику. Вместе с другими предметами изучение математики должно содействовать развитию научного мышления. При изложении курса соблюдаем известную умеренность в отношении полноты и методической строгости доказательств и обращаем особое внимание на выявление конкретного содержания математических понятий и на методике применения математического аппарата в естествознании и технике. У студентов-первокурсников возникают трудности при усвоении большого объема материала, насыщенного огромным количеством новых терминов, понятий, теорем. Очень важно помочь им адаптироваться и усвоить программу по математике. И здесь используется весь арсенал методических приемов, средств и форм обучения. Главное на первом этапе – научить учиться и поддержать интерес к процессу познания. Сделать изучение математики мотивированным, помочь увидеть студенту как «абстрактные» теоремы работают в конкретных условиях можно с помощью задач прикладного характера. Исходя из этого, на лекциях и практических занятиях рассматриваются типичные примеры из химии, биологии, медицины, показывающие эффективность математических методов решения многих проблем [1-4].

Так, например, при изучении зависимостей, описывающих различные процессы, в первую очередь встает вопрос о нахождении скоростей этих процессов. Здесь можно говорить о задаче нахождения скорости неравномерного движения, о скоростях накопления биомассы, изменения линейных размеров растения, химической реакции, растворении лекарственных веществ, нагревания и остывания тела и т.д. Все эти задачи приводят к однотипным вычислениям, результат которых называют производной. Для закрепления геометрического, физического, химического и биологического смысла производной предлагаются следующие упражнения.

1. Пусть движение определяется уравнением $S = 2t^2 - t +$ $(- \; c,; S - \; м.)$. Найти скорость движения, при $t = \;c$.
2. Найти скорость изменения популяции бактерий, если в момент времени t (ч) она насчитывает $p(\;) = \;000 + \;00t^2$ особей.
3. Зависимость между возрастом коров x (лет) и суточным удоем y (л) выражается производственной функцией $y = -\;,53 + \;,86x - \;,49x^2$. Как изменится среднесуточный удой коров, если возраст их увеличился с 3 до 5 лет?
4. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем ***t*** выражается уравнением $x = A(+ \; ^{- \; t})$, где ***A*** и k – постоянные. Определите скорость реакции в момент времени ***t***.
5. Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению $C = C_0e^{- \; t}$, где **C**$_0$ – исходное количество лекарственного вещества в таблетке; ***k*** – постоянная скорости растворения. Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.
6. Смещение в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением $y = te^{-t^2}/2, t \rangle 0$. Определить скорость и ускорение в зависимости от времени.
7. Рост числа бактерий подчиняется закону $f(\;) = \dfrac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - \;)}$. Определить скорость роста числа бактерий.
8. Количество электричества, прошедшего через проводник, начиная с момента времени ***t*** = 0, определяется формулой $g = 2t^2 + \;t + \;$. Вычислить силу тока в конце пятой секунды.
9. Форму комплекса потенциалов, возникающих при возбуждении сетчатки глаза светом (электроретинограмма), можно выразить уравнением

$U = r\cdot\sin\left(-3{,}05\cdot10^{-3}t^3 + 5{,}6\cdot10^{-2}\cdot t^2 + 1{,}59\cdot10^{-1}\cdot t\right)$, где ***t*** – время, ***r*** – постоянная. Определить скорость изменения потенциала в начальный момент времени ***t*** = 0.

Среди многих задач, решаемых с помощью производных, наиболее важной является задача нахождения экстремума функции и связанная с ней задача нахождения наибольшего и наименьшего значения функции. Для решения ее следует, исходя из условия, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наибольшее или наименьшее значение полученной функции. При этом интервал независимой переменной, который может быть конечным или бесконечным, также определяется из условия задачи. Предлагаем задания такого типа.

1. Вырезать из круга сектор так, чтобы можно было сделать конусообразный фильтр с максимальным объемом.
2. Реакционный аппарат имеет форму закрытого цилиндра. Найти радиус цилиндра так, что при заданном объеме **V** его поверхность была наименьшей.
3. Процессы сульфирования и хлорирования органических соединений часто осуществляются с применением света. Найти, на какой высоте ***x*** над площадкой следует повесить источник света, чтобы освещенность площадки была максимальной. При этом предполагается, что площадка не перпендикулярна лучам. (Учесть, что освещенность площадки обратно пропорциональна квадрату расстояния ее от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей).
4. Требуется вырыть силосную яму объемом V (м^3) с квадратным дном таких размеров, чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?
5. Скорость роста y у популяции x задана формулой $y = 0{,}001x(100 - x)$. При каком размере популяции эта скорость макси-

мальна? Какова равновесная популяция, т.е. популяция для которой скорость равна нулю?

6. Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

7. Из трех одинаковых тонких досок изготовить желоб с наибольшим поперечным сечением.

8. Установлено, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $W = E^2 R/(R + r)^2$, где **E** – электродвижущая сила элемента; **R, r** – соответственно внешнее и внутреннее сопротивления. Каким должно быть внешнее сопротивление **R** цепи, чтобы отдаваемая элементом энергия **W** была наибольшей?

9. Установить при какой концентрации кислорода y в газовой смеси $x + y = 100$ скорость окисления азота будет максимальной, если уравнение кинетики имеет вид $v = k(100x^2 - x^3)$, где **k** – постоянная, x – концентрация окиси азота.

10. Реакция организма на введенный лекарственный препарат может выражаться в понижении температуры, повышении давления и т.д. Степень реакции зависит от назначенной дозы лекарства. Пусть x обозначает дозу назначенного лекарственного препарата, а степень реакции y описывается функцией $y = f(x) = x^2(a - x)$, где **a** – положительная постоянная. При каком значении **x** реакция максимальна?

Приложения неопределенного и определенного интегралов многочисленны. С их помощью можно определить: суммарную реакцию организма на данную дозу лекарства; концентрацию препарата в любой момент времени; уравнение изменения массы некоторого вещества и роста числа бактерий; площадь плоской фигуры произвольной формы; объемы тел; величину работы, совершаемой переменной силой; количество вещества вступившего в реакцию; прирост численности популяции микроорганизмов и мн.др. В этой связи предлагаем рассмотреть следующие задачи:

1. Скорость радиоактивного распада вещества определяется формулой $v = -\ m_0 e^{-\ t}$, где ***k*** – постоянная, ***m***$_0$ – масса радиоактивного вещества при ***t=t₀***. Составить уравнение изменения массы ***m(t)***.
2. В момент времени ***t*** скорость изменения концентрации препарата с изотропным индикатором определяется формулой $v = {}^{-\ \ln 2}$. Найти концентрацию препарата ***c(t)***.
3. Скорость роста числа бактерий задается формулой $v = 0^4 - \cdot 10^3 t$. Составить уравнение роста числа бактерий ***x(t)***, если при ***t=0*** ***x(0)=10⁶***.
4. Скорость точки меняется по закону $v = 0 + 3t\ (-\ \ м/с)$. Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени от 0 до 10 с?
5. Найти массу стержня длины 1м, если линейная плотность меняется по закону $\rho = 20x + 0{,}15x^2$, где ***x*** – расстояние от одного из концов стержня, в м; ρ - в кг/м.
6. Шар лежит на дне бассейна глубиной ***H***. Определить работу, необходимую для извлечения шара из воды, если радиус шара ***R***, а удельный вес δ.
7. Реакция организма на определенную дозу лекарственного препарата в момент времени ***t*** задается формулой $f(\ ) = \frac{1}{1+\ ^2}$. Определить суммарную реакцию на данную дозу.

Дифференциальные уравнения занимают важное место в решении задач физико-химического и медико-биологического содержания. Пользуясь ими мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс или явление. Решение любой задачи с помощью математического анализа можно разбить на три этапа:

1) перевод условий задачи на язык математики;

2) решение задачи;

3) оценка результатов.

Первая часть работы обычно заключается в составлении дифференциального уравнения и является наиболее трудной, так как общих методов составления дифференциальных уравнений нет и навыки в этой области могут быть приобретены лишь в результате изучения конкретных примеров. Остановимся на некоторых из них.

1. Зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени. Ядра атомов радиоактивных элементов с течением времени распадаются. Опытным путем установлено, что скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся в данный момент ядер атомов. В аналитической форме это можно записать так:

$$\frac{dN}{dt} = -\ N, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{N}$ – число нераспавшихся ядер атомов в данный момент; $\boldsymbol{t}$ – время; **k** – постоянная распада. Минус означает, что с течением времени число нераспавшихся ядер атомов уменьшается и производная убывающей функции отрицательна. Скорость же по смыслу – положительная величина.

Установим зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, учитывая, что при $\boldsymbol{t = 0}$ число нераспавшихся ядер атомов $\boldsymbol{N=N_0}$. В уравнении (1) разделим переменные и проинтегрируем левую часть по $\boldsymbol{N}$, а правую по $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{dN}{N} = -kdt; \qquad \int\frac{dN}{N} = -k\int dt;$$

$$\mathrm{ln}|N| = -\ t + \mathrm{n}|c|; \qquad N = {:}e^{-\ t}.$$

Полагая в последнем уравнении $\boldsymbol{t=0}$ и $\boldsymbol{N=N_0}$, находим $\boldsymbol{c=N_0}$. Тогда

$$N = \mathrm{V}_0 e^{-\ t}. \qquad (2)$$

Формула (2) отражает зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, выраженную экспоненциальной функцией в интегральной форме.

Из формулы (2) можно определить период полураспада T, т.е. время, в течение которого число ядер атомов уменьшается вдвое. Положив в формуле (2) $t = T$ и $N = N_0/2$, получим: $N_0/2 = N_0 e^{-kT}$, $1/2 = e^{-kT}$.

Прологарифмируем последнее выражение: $\ln(1/2) = -kT$, откуда

$$T = \ln 2/k \approx 0{,}693/k. \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что период полураспада связан с постоянной распада и является характеристикой данного радиоактивного вещества. Например, для радона $k = 2{,}084 \cdot 10^{-6} \cdot c^{-1}$. Подставив это значение в формулу (3), получим период полураспада радона T=3,8 5 суток.

2. Закон охлаждения тела. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и окружающей среды. Пусть тело нагрето до температуры $\mathbf{T_0}$, температуру окружающей среды будем считать постоянной и равной T_c, $T_c < T_0$. В момент времени ***t*** температура тела равна **T.** Скорость изменения темперутары dT/dt пропорциональна разности **T-T_c,** т.е.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c) \qquad (4)$$

Минус означает, что с возрастанием времени **t** температура тела **T** уменьшается. Коэффициент пропорциональности **k** зависит как от физических свойств тела, так и от его геометрической формы.

Разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dT}{T - T_c} = -kdt, \quad \int \frac{dT}{T - T_c} = -\int kdt,$$

$$\ln|T - T_c| = -kt + \ln|c|; \; \ln|T - T_c| = \ln e^{-kt} + \ln|c|,$$

$$T - T_c = ce^{-kt}, \quad T = T_c + ce^{-kt}.$$

Подставив начальные условия **t=0, T=T₀**, найдем значение **c**: $T_0 = T_c + ce^{-k\cdot 0}$, $C = T_0 - T_c$, тогда

$$T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-kt} \tag{5}$$

Уравнение (5) выражает закон охлаждения тела с течением времени.

3. Кинетика химических процессов. В общем случае скорость химической реакции зависит от концентрации реагирующих веществ. Уравнение, выражающее зависимость скорости реакции от концентрации каждого вещества, влияющего на скорость, называется кинетическим дифференциальным уравнением химического процесса. Рассмотрим химические процессы первого, второго и третьего порядка.

Закон реакции первого порядка. Скорость реакции первого порядка выражается уравнением:

$$V = \frac{dc}{dt} = -kc, \tag{6}$$

где **c** – концентрация реагирующего вещества, **t** – время, **k** – постоянная скорости реакции. Минус в уравнении (6) означает, что концентрация реагирующего вещества с течением времени убывает. Производная убывающей функции отрицательна, скорость положительна.

В дифференциальном уравнении (6) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dc}{c} = -kdt; \quad \int\frac{dc}{c} = -\int kdt; \quad \ln|c| = -kt + \ln|c_1|;$$

$$\ln|c| = \ln e^{-kt} + \ln|c_1|; \quad c = c_1 e^{-kt}.$$

Полагая при **t=0 c=c₀**, получаем **c₁=c₀**, следовательно

$$c = c_0 e^{-kt}. \tag{7}$$

Формула (7) выражает закон реакции первого порядка в интегральной форме.

Пользуясь уравнением (7), можно определить время, за которое концентрация исходного вещества уменьшится наполовину. Это время называют периодом полупревращения или полупериодом протекания реакции и обозначают τ или $\tau_{1/2}$. Подставив значения $t = \tau$; $c = c_0/2$ в уравнение (7), получим $\frac{c_0}{2} = c_0 e^{-k\tau}$, откуда $1/2 = e^{-k\tau}$, $\ln(1/2) = -k\tau$

$$\tau = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{0{,}693}{k}.$$

Период полупревращения для реакции первого порядка не зависит от исходной концентрации вещества, и за равные промежутки времени расходуется одна и та же доля вещества.

<u>Закон реакции второго порядка.</u> Скорость реакции второго порядка пропорциональна концентрации каждого из реагирующих веществ или квадрату концентрации одного из реагентов:

$$V = \frac{dc}{dt} = -k c_1 \cdot c_2, \text{ если } c_1 = c_2 = c, \text{ то}$$

$$\frac{dc}{dt} = -k c^2. \qquad (8)$$

Уравнение (8) – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dc}{c^2} = -kdt; \quad \int \frac{dc}{c^2} = -\int kdt; \quad -\frac{1}{c} = -kt + c_1.$$

Определим постоянную $\mathbf{c_1}$ из начальных условий (при $\mathbf{t=0, c=c_0}$): $-\frac{1}{c_0} = c_1$.

Подставив это значение в последнее уравнение, получим $-\frac{1}{c} = -kt - \frac{1}{c_0}$

или $\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt$, откуда $k = \frac{1}{t} \cdot \frac{c_0 - c}{c_0 c}$. Подставив в последнее выражение

$t = \tau$ и $c = \frac{c_0}{2}$. Найдем период полупревращения для реакции второго порядка: $\tau = 1/(kc_0)$.

Закон реакции третьего порядка. Скорость реакции третьего порядка пропорциональна концентрации каждого из трех реагирующих веществ или кубу концентрации одного из реагентов:

$$\frac{dc}{dt} = -kc_1 \cdot c_2 \cdot c_3, \quad \text{если } c_1 = c_2 = c_3 = c, \text{ то}$$

$$\frac{dc}{dt} = -kc^3. \tag{9}$$

Уравнение (9) – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dc}{c^3} = -kdt; \quad \int \frac{dc}{c^3} = -\int kdt; \quad -\frac{1}{2c^2} = -kt + c_1.$$

Определим постоянную $\mathbf{c_1}$ из начальных условий (при $\mathbf{t=0}$, $\mathbf{c=c_0}$): $-\frac{1}{2c_0^2} = c_1$. Подставляя это значение $\mathbf{c_1}$ в последнее уравнение, получим

$$-1/(2c^2) = -kt - 1/(2c_0^2) \text{ или } \frac{1}{2c^2} - \frac{1}{2c_0^2} = kt,$$

откуда $k = \frac{1}{2t} \cdot \frac{c_0^2 - c^2}{c_0^2 c^2}$.

Для реакций третьего порядка период полупревращения при $t = \tau$, $c = c_0/2$ равен $\tau = 3/(2kc_0^2)$.

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{10}$$

Говоря о профессиональной направленности курса, мы привели только часть разделов где используются прикладные задачи. Их круг гораздо шире (теория пределов, функции многих перемнных, приближенные вычисления, теория рядов и др.). Предлагая студенту задачи, следует помнить, что средний студент – это не ученый, который может подолгу и целенаправленно думать над ней. Если размышления не приводят его к цели, то он перестает думать и бросает книгу. Поэтому, считаем целесообразным, предлагать некоторые указания к решению задач, которые бы управляли мышлением студента, обучали творчеству. Ведь когда студент слушает лекцию или работает над учебником, то он осваивает чужие мысли, если же он решает задачу, то думает сам. Поэтому можно смело утверждать, что именно задачи учат творчеству. Современному обществу требуются развитые личности, поэтому наша задача сформировать специалиста, который бы смог найти выход из сложных и нестандартных ситуаций. Практическая направленность курса математики помогает обучаемым увидеть проблему с разных сторон, проанализировать ее, составить математическую модель процесса, провести исследования и, как высшая ступень творчества, самостоятельно научиться ставить перед собой новые профессиональные задачи. Таким образом, воспитывая у студентов прикладную математическую культуру, мы тем самым стараемся развивать их интуицию и эрудицию в вопросах приложения математики, вырабатывать привычные навыки исследователя и умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, связанном с их дальнейшей деятельностью.

1.Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. – М., 1980. – 368 с.
2.Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1971. – 823 с.
3.Зайцев И.А. Высшая математика: [Учебное пособие для неинж.спец.с.-х. вузов]. – М.: Высш.шк., 1991. – 400 с.
4.Кузнецов А.В. и др. Высшая математика: Общий курс: Учебник / Под общей редакцией проф.Яблонского. – Мн.: Выш.шк., 1993. – 349 с.

Резюме.Показана важливість математичних методів для розв'язку задач прикладного характеру. Зроблено підбір практичних задач з певних тем.

Summary. The significance of mathematical methods is demonstrated when solving the problems of applied nature. A selection of practical problems on definite topics have been made.

ДЕЯКІ ПРИЙОМИ СТВОРЕННЯ ПРОБЛЕМНИХ СИТУАЦІЙ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

В.М.Дрібан, доцент, Г.Г.Пеніна, канд. екон. наук, доцент,
Донецький державний університет економіки і торгівлі
ім. І.М.Туган-Барановського

Створення проблемних ситуацій є одним з центральних і в той же час одним із скрутних для викладача моментів у практичній реалізації проблемного навчання. Навчальна практика показує, що одним з найбільш ефективних способів створення проблемних ситуацій є розгляд парадоксів або софізмів, пред'явлення тому, хто вчиться, суперечливих, на перший погляд, суджень, або судження, в якому припускається завуальована помилка, завдяки чому помилковий, по суті, висновок здається правильним. У цих випадках суперечності, на основі яких виникають проблемні ситуації, завжди виражені в яскравій формі і тому легко відчуваються студентами. Це, в свою чергу, створює високий емоційний настрій, виникає особиста зацікавленість у розв'язанні задачі. Знання, які здобуті у результаті розв'язання таких проблемних ситуацій, студенти пам'ятають міцно і довго.

Проблемна ситуація може виникнути як тоді, коли студенти самостійно приходять до суперечливих результатів, так і тоді, коли суперечливі результати навмисно одержує викладач.

Наведемо деякі прийоми, які ми використовуємо для створення проблемних ситуацій у курсі вищої математики.

1. Розширення границь застосовності деяких понять та формул .
2. Відкидання з теореми тих чи інших суттєвих умов.
3. Створення ситуацій, в яких студентів може підвести інтуїція та наочні міркування.
4. Використання того, що студенти часто не усвідомлюють важливості виконання умов існування того чи іншого поняття.

5. Використання інколи неправильного трактування студентами понять, теорем та іншої інформації.
6. Використання помилок та недоліків, які зустрічаються у навчальних посібниках.

Зауважимо, що ці прийоми часто використовуються у тісному сполученні.

Наведемо приклади проблемних ситуацій, які можна сконструювати на основі деяких з вищевикладених прийомів (з досвіду роботи).

Розширення границь застосовності деяких понять та формул

Ситуація 1. Перед введенням поняття невласного інтегралу від функції, яка має розрив у точці, можна «обчислити», наприклад, інтеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2.$$

Відповідь явно неправильна, так як $\frac{1}{x^2} > 0$. Проблемна ситуація виникла завдяки тому, що поняття означеного інтегралу і формула Ньютона-Лейбніца були застосовані до розривної функції.

Тут, як правило, викладач сам вказує на помилку і евристичними підказуваннями наводить студентів на думку про те, що спочатку треба дати означення інтегралу від функції, яка має розрив у точці. Означення дається при активній участі студентів за аналогією з означенням інтегралу по нескінченному проміжку.

Ситуація 2. У більшості підручників наведена формула для радіуса збіжності степеневого ряду у вигляді:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (1)$$

Для ряду

$$1 + 2x^2 + 4x^4 + \ldots + 2^{n-1}x^{2n-2} + \ldots$$

ця формула дає $R = \frac{1}{2}$. Але якщо знайти R безпосередньо за ознакою Даламбера, то одержимо $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Якщо є час, викладач разом із студентами аналізує доведення формули для R, після чого виявляється, що формула (1) має місце лише для рядів «без пропусків».

На жаль, це застереження, як правило, не робиться у підручниках, тобто по суті у цих підручниках допускається помилка. Знаходження принципіальної помилки у підручнику завжди дає великий емоціональний ефект.

Ситуація 3. Якщо зробити ділення «кутом», то будемо мати такі ряди:

$$1/(1+x) = \; - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

$$1/(1+x+x^2) = \; - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots,$$

$$1/(1+x+x^2+x^3) = \; - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \ldots$$

При $x =$ у правій частині рівностей одержимо ряд 1-1+1-1+…, а у лівих частинах відповідно 1/2, 1/3, 1/4. Це одна суперечність. Друга суперечність полягає у тому, що студентам відомо: ряд 1-1+1-1+… розбігається, тобто взагалі не має суми.

Після розв'язування цієї проблемної ситуації студенти чітко засвоюють, що при використанні розкладу функції в ряд необхідно враховувати область збіжності цього ряду.

Поняття класичної ймовірності може бути застосоване лише до рівноможливих та єдино можливих подій. Порушення цих умов може призвести до проблемної ситуації (ситуації 4 – 6).

Ситуація 4. Студенти безпосередньо підраховують, що ймовірність випадання парного числа очок при киданні одного грального кубика дорівнює 1/2. Після цього викладач пропонує інший спосіб розв'язання задачі.

Можливі два випадки (випадання парного і непарного числа очок), з яких сприятливим є один, тобто $p = 1/2$. Відповіді збіглися.

Далі студентам пропонують підрахувати ймовірність того, що при киданні одного грального кубика випаде число очок, яке ділиться на 4. Відповідь $p = 1/6$. Але викладач пропонує ті ж самі міркування, що і в першому випадку, і знов одержує відповідь $p = 1/2$. Виникає проблемна ситуація.

Викладач запевнює студентів, що у першому випадку обидва способи розв'язання правильні, але чому ж тоді у другому випадку одержані різні відповіді? Виникає ще одна проблемна ситуація.

Ситуація 5. Студентам пропонують розв'язати таку задачу: «Гральний кубик кинули два рази. Знайти ймовірність того, що сума очок, що випали, дорівнює 7».

Правильні міркування такі. Можливі $n = 6 \cdot 6 = 36$ випадків. З них сприятливими є 6 випадків: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3). Отже, $p = 6/36 = 1/6$.

Але студенти можуть запропонувати такий природний шлях «розв'язання» задачі. Можливі випадки: «сума очок дорівнює 2», «сума очок дорівнює 3» і так далі до «сума очок дорівнює 12». Всього 11 випадків, з них лише один випадок є сприятливим, тобто $p = 1/11$.

Різні відповіді створюють проблемну ситуацію. Суть помилки та ж сама, що і в ситуації 1: випадки: «сума очок дорівнює 2», «сума очок дорівнює 3» і так далі не рівноможливі. Дійсно, наприклад, сума 2 виникає в одному варіанті (2=1+1), а сума 4 – у трьох варіантах (4=1+3, 4=3+1, 4=2+2).

Зауважимо, що якщо студенти запропонують лише один шлях розв'язання задачі, то для створення проблемної ситуації інший шлях повинен запропонувати викладач.

Ситуація 6. Після того, як студенти вивчили формулу повної ймовірності, можна вирішити, наприклад, таку задачу: «Маємо два ящики. У першому 5 деталей, з яких 3 стандартні, у другому 6 деталей, з яких 5 стандартні. Навмання вибираємо ящик і навмання беремо деталь. Яка ймовірність того, що деталь буде стандартною?»

Формула повної ймовірності приводить до відповіді:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{43}{60}\ .$$

Після цього викладач пропонує такі міркування (часто це роблять самі студенти). Уявимо, що ящики стоять поряд і усунемо перегородки. Тоді фактично маємо один ящик, що містить 11 деталей, серед яких 8 стандартні, тобто ймовірність вийняти стандартну деталь дорівнює 8/11.

Якщо студенти не можуть знайти помилку, викладач звертає увагу на те, що фактично треба дати відповідь на слідуючи питання: чи рівнозначні з позиції теорії ймовірностей ситуації, коли деталі знаходяться в окремих ящиках (ящики A і B) або в одному (ящик C). Студенти самостійно або з допомогою викладача роблять висновок, що вищевикладені способи розв’язання – це розв’язання двох різних задач, хоч різниця між ними не зовсім помітна. Дійсно, щоб мати можливість використовувати класичне означення ймовірності, деталі в ящику C при другому способі «розв’язання» задачі повинні бути ретельно перемішані, бо тільки це забезпечить рівноможливість подій. Але у задачі мається на увазі, що ретельно перемішані деталі лише у кожному з двох ящиків A і B.

Цікаво провести математичний аналіз розв’язків цих двох задач з метою виявлення умов, коли відповіді будуть збігатися.

Природно висунути гіпотезу, що відповіді будуть збігатися, якщо події «вийнята стандартна деталь з i-того ящика (i = 1,2)» рівноймовірні, тобто ймовірності вийняти стандартну деталь з будь-якого ящика однакові. Перевіримо цю гіпотезу для K ящиків.

Нехай маємо K ящиків, причому ймовірності вийняти стандартну деталь з будь-якого ящика однакові і дорівнюють p. Якщо в ящику з номером i n_i деталей, серед яких m_i деталей стандартні, то

$$m_1/n_1 = n_2/n_2 = \ldots = n_к/n_к = p. \qquad (2)$$

Нехай подія A – виймання стандартної деталі з навмання взятого ящика. За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = 1/к \cdot p + 1/к \cdot p + \ldots + 1/к \cdot p = p.$$

Зауважимо, що відповідь можна було передбачити.

Нехай тепер ящики стоять поряд і усунемо перегородки (тобто фактично маємо один ящик). Якщо всі деталі ретельно перемішані, то можна використати класичне означення ймовірності.

Отже, маємо $(n_1+n_2+\ldots+n_к)$ деталей, серед яких $(m_1+m_2+\ldots+m_к)$ деталей стандартні. Із (2) випливає, що $m_i = pn_i$ $(i = 1, 2,\ldots, к)$, тобто кількість стандартних деталей дорівнює $p(n_1+n_2+\ldots+n_к)$.

Ймовірність вийняти стандартну деталь дорівнює

$$p(n_1 + n_2 + \ldots n_к)/(n_1 + n_2 + \ldots n_к) = p.$$

Відповіді, як і очікувалося, збіглися.

Знайдемо усі умови збігу відповідей у випадку двох ящиків.

Якщо деталі у кожному ящику ретельно перемішані і навмання виймають деталь з навмання взятого ящика, то по формулі повної ймовірності

$$P(A) = 1/2 \cdot m_1/n_1 + 1/2 \cdot m_2/n_2 = 1/2\left(m_1/n_1 + m_2/n_2\right).$$

Якщо усі деталі знаходяться в одному ящику і ретельно перемішані, то

$$P(A) = (m_1 + n_2)/(n_1 + n_2).$$

Умова збігу відповідей має вигляд

$$1/2\left(n_1/n_1 + n_2/n_2\right) = (m_1 + n_2)/(n_1 + n_2).$$

Після алгебраїчних перетворювань одержимо рівність

$$(n_1-n_2)(m_1n_2-m_2n_1) = 0.$$

Звідки або $n_1 = n_2$, або $m_1n_2-m_2n_1 = 0$.

Другий випадок відповідає випадку збігу ймовірностей вийняти стандартну деталь з будь-якого ящика. Його було розглянуто у випадку *К* ящиків.

Очевидне узагальнення допускає і випадок, якщо у всіх ящиках однакова кількість деталей ($n_1=n_2=...=n_к=n$).

За формулою повної ймовірності

$$P(A)=\frac{1}{к}\cdot\frac{m_1}{n}+\frac{1}{к}\cdot\frac{m_2}{n}+...+\frac{1}{к}\cdot\frac{m_к}{n}=\frac{(m_1+m_2+...+m_к)}{кn}.$$

Усунемо перегородки між ящиками та ретельно перемішаємо деталі. Маємо *кп* деталей, з яких ($m_1+m_2+...+m_к$) стандартні. Тоді

$$P(A)=\frac{(m_1+m_2+...+m_к)}{кn}.$$

Відповіді в обох випадках однакові.

Результати аналізу дозволяють створити проблемну ситуацію іншим способом: спочатку розглянути обидва вищевикладені розв’язки, коли кількість деталей в ящиках однакова, а потім – у разі різної кількості деталей.

Ситуація 7. При вивченні властивостей інтегральної функції розподілу лектор доводить, що для неперервної випадкової величини ймовірність того, що вона прийме конкретне фіксоване значення, дорівнює нулю. Проте зрозуміло, що вона може прийняти це значення.

Студенти, як правило, не можуть самостійно розв’язати цю проблемну ситуацію, і тоді лектор задає питання: «А звідки випливає, що коли ймовірність події дорівнює нулю, то вона не може відбутися?» Звичайно, студенти дають відповідь, що $P(A)=m/n$, тобто коли $p=0$, то $m=0$, і подія відбутися не може. Питання: «Чи можливо у даному випадку користуватися класичним означенням ймовірності?» Після цього з’ясовується, що протиріччя в ситуації 7 уявне. Воно виникло тому, що викладач навмисно розширив границі застосування класичного означення ймовірності.

У даному випадку студентам бажано пояснити суть питання на прикладі статистичної ймовірності. Слід нагадати, що відносна частота при досить великому числі випробувань не дорівнює ймовірності, а лише наближається до неї. Отже, коли ймовірність події дорівнює нулю, то з цього випливає лише те, що при необмеженому повторенні випробувань відносна частота (тобто і число появ події) не дорівнює нулю, а лише наближається до нуля. Це свідчить про те, що подія буде відбуватися як завгодно рідко.

Відкидання з теореми тих чи інших суттєвих умов

Ситуація 8. Треба знайти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

Студенти, як правило, пропонують таке «розв’язання»:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=0.$$

Не коментуючи його, викладач пропонує інші перетворення:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

Після розв’язання проблемної ситуації, що виникла, студенти добре засвоюють, що в теоремі про суму нескінченно малих вимога скінченності числа доданків є суттєвою.

Ситуація 9. Студенти за правилом Лопіталя виконують такі перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Далі, як правило, студенти роблять висновок: границя справа не існує, тобто не існує і шукана границя. Тоді викладач виконує такі перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

Яка відповідь правильна? Викладач пропонує сформулювати правило Лопіталя, після чого виявляється причина помилкового висновку студентів.

Після подібних прикладів у студентів надовго залишається в пам'яті, що правило Лопіталя можна застосовувати лише тоді, коли границя відношення похідних існує або дорівнює нескінченності.

Ситуація 10. Перед вивченням теореми складання ймовірностей двох сумісних подій лектор, *не називаючи теми лекції,* пропонує студентам розв'язати, наприклад, таку задачу. Дві електричні лампочки послідовно ввімкнені в ланцюг. Ймовірність того, що лампочки перегорять, якщо напруга у мережі перевищить номінальну, дорівнюють 0,6 і 0,3. Знайти ймовірність того, що при підвищенні напруги струму у ланцюгу не буде.

Студенти, як правило, міркують таким чином: струму у ланцюгу не буде, якщо перегорить чи перша, чи друга лампочка, отже за теоремою складання ймовірностей шукана ймовірність дорівнює $p = 0{,}6+0{,}3 = 0{,}9$.

Після цього лектор міркує так: струму у ланцюгу не буде якщо перегорить хоч би одна лампочка, отже $p = 1 - q_1q_2 = 1 - 0{,}4\cdot 0{,}7 = 0{,}72$.

Якщо ймовірності дорівнюють, наприклад, 0,7 і 0,6, то проблемна ситуація виникає відразу після того, як застосована теорема складання: $p = 0{,}7 + 0{,}6 = 1{,}3 > 1$.

Проблемна ситуація виникає через те, що до вивчення теореми складання ймовірностей сумісних подій студенти, як правило, пам'ятають теорему складання у вигляді: ймовірність суми подій дорівнює сумі ймовірностей подій, а та суттєва обставина, що події повинні бути несумісними, часто випадає з поля зору студентів.

Зауважимо, що у разі, коли студенти правильно розв'яжуть задачу, неправильне «розв'язання» наводить сам викладач.

Створення ситуацій, в яких студентів може підвести інтуїція та наочні міркування

Деякі проблемні ситуації засновані на протиріччі між неправильними висновками, які студенти можуть зробити на підставі інтуїції, наочних міркувань, нібито «здорового розуму», та строгими математичними означеннями та доведеннями.

Ситуація 11. Викладач задає запитання: «Яку площу має нескінченна фігура?» Звичайна відповідь: «Площа буде нескінченною». Після цього викладач малює графік функції $y = \frac{1}{1+x^2}$ і обчислює інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

Такий приклад не тільки дає правильну уяву про площу, але і справляє великий емоційний ефект, тому що цей результат суперечить інтуїції та «здоровому розуму» більшості студентів.

Ситуація 12. Так як $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$, то площа нескінченної фігури, яка міститься між гіперболою $y = \frac{1}{x}$, прямою $x = 1$ та віссю OX також нескінченна (більш точно, площа цієї фігури не існує, однак у даному випадку краще говорити про нескінченну площу). Це не суперечить звичайним уявленням студентів. Але якщо обертати цю фігуру навколо осі OX, будемо мати нескінченне тіло із скінченним об’ємом

$$V = \pi \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi .$$

Ситуація 13. На вступній лекції по теорії ймовірностей лектор пропонує студентам іти на парі. Він стверджує, що в аудиторії знайдуться хоч би два студенти, які народилися в один і той же день одного і того ж місяця. Таке ствердження інтуїтивно здається студентам надто малоймовірним. Однак, як правило, лектор виграє це парі (звичайно, можливі винятки). Можна ще раз запропонувати іти на це парі, виключив двох, або більше студентів, у яких співпали дні та місяці народження. Знову, як правило, виграє лектор. Цей факт здається дивовижним.

Зрозуміло, що на вступній лекції викладач не може провести відповідні математичні розрахунки. Він повідомляє, що теорія ймовірностей, яку починають вивчати студенти, дає можливість розв'язати цю проблемну ситуацію. Виявляється, що коли в аудиторії лише 23 чоловіки, то вже шанс виграти парі більше, ніж 0,5, при 30 чоловіках він дорівнює 0,7, а при 40 – 0,9. Це означає, що коли в аудиторії тільки 40 студентів, то при багаторазовому повторюванні цієї «гри», у середньому, викладач буде вигравати 9 разів з 10.

Потім викладач інформує студентів, що багато які «ігри», що пропонують населенню державні та комерційні структури, розраховані на аналогічний ефект. Завдяки відповідній рекламі людині, яка не володіє теорією ймовірностей, здається, що їй пропонують вигідні умови, тоді як її виграш надто малоймовірний.

Такі «ігри» вже на першому етапі забезпечать інтерес до вивчення теорії ймовірностей.

Ситуація 14. Викладач пропонує студентам таку «гру». Кинемо кубик 4 рази. Якщо хоч би один раз випаде 1 очко, виграють студенти. Тепер кинемо 2 кубики 24 рази і якщо хоч би один раз випадуть дві одиниці, виграє викладач. Будете іти на парі?

Студентам інтуїтивно здається, що «гра» вигідна для викладача (у першому випадку кубик кидають всього 4 рази, тоді як у другому 24). Викладач переконує студентів, що шанси однакові. Дійсно, ймовірність того, що випаде одна одиниця при одному киданні кубика у шість разів більше, ніж дві одиниці на двох кубиках (1/6 і 1/36), але і кількість кидань у шість разів менше (4 і 24). Отже, шанси однакові.

Студенти, як правило, погоджуються з викладачем. Після цього викладач пропонує провести точні розрахунки. Це нескладна задача. У першому випадку $p_1 = 1 - (5/6)^4$, у другому $p_2 = 1 - (35/36)^{24}$. Легко перевірити, що $p_1 > p_2$, так що «гра» вигідна для студентів.

У цій задачі студентів підводить інтуїція, а первісні міркування викладача були правдоподібними, але математично некоректними.

Ситуація 15. Викладач каже студентам: «Уявимо собі, що ми кинули монету 1000 разів і всі 1000 разів випав герб (це дуже малоймовірно, але можливо). Вам пропонують іти на парі: якщо у 1001-й раз знову випаде герб, ви виграєте, а якщо решка – програєте. Ви будете іти на парі?» Студенти упевнені, що таке парі не на їх користь. І знову студентів підводе інтуїція.

Проблемна ситуація виникає після таких міркувань викладача: монета не має пам'яті, тому ймовірність того, що у 1001-й раз з'явиться орел чи решка, така ж, як і у перший раз, тобто 1/2.

До цього прикладу можна повернутися після вивчення теореми Бернуллі. Як оцінити цю ситуацію на основі теореми Бернуллі? Чия думка правильна: студентів або викладача? Студенти упевнені, що їх відповідь, яка була зроблена на основі інтуїції, цілком підтверджує теорема Бернуллі. Адже з теореми випливає, що при збільшенні числа випробувань число появ решки повинно наближатися до числа появ герба, тому скоріше при 1001-му киданні монети з'явиться решка.

Після цього викладач роз'яснює, що правильні все ж його міркування, а помилка студентів полягає у неправильному трактуванні теореми Бернуллі. У відповідності з цією теоремою при достатньо великому числі кидань монети з ймовірністю, яка близька до одиниці, відношення числа появ герба до числа появ решки наближено дорівнює одиниці. Але з цього не випливає, що різниця між числом появ герба і числом появ решки при достатньо великому числі випробувань повинна бути достатньо малою.

Викликає інтерес така інформація викладача: при достатньо великому числі випробувань достатньо часто з'являються довгі серії тільки гербів чи тільки решок.

Багато прикладів створення проблемних ситуацій наведено в [1].

1. Дрибан В.М. Активизация обучения в высшей школе: аспект проблемного обучения. – Донецк: Кассиопея, 1999. – 141 с.

Резюме. Предложены и проиллюстрированы конкретными примерами некоторые приемы создания проблемных ситуаций при изложении курса высшей математики.

Summary. Definite methods of making problematic situations while delivering the course of higher mathematics are pub forward and illustrated by concrete examples.

УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н.В.Коваленко, к.ф.-м.н., доцент,
Донецький національний університет
О.К.Узбек, к.ф.-м.н., доцент,
О.В.Шепеленко, к.ф.-м.н., доцент,
Донецький державний університет економіки і торгівлі
ім. М.І.Туган-Барановського

На сучасному етапі без ретельної продуманої, науково обгрунтованої і чітко організованої системи активних методів навчання не можливо суттєво підвищити якість підготовки спеціалістів. Необхідна система неперервного навчання в процесі діяльності, що формує творчу особистість і розвиває продуктивне мислення. Важливе місце в цій системі, безумовно, належить удосконаленню методичних засобів шляхом введення в навчальний процес передових сучасних технологій навчання.

Одним із напрямків удосконалення методики викладання курсу вищої математики у вищому навчальному закладі для студентів нематематичного профілю слід вважати раціональне поєднання традиційної форми навчання з використанням сучасних інформаційних технологій на основі застосування новітніх засобів комп'ютерної техніки.

Широка комп'ютеризація є однією з найбільш актуальних проблем сучасного суспільного прогресу, технічною основою рішення якої є наявність персональних комп'ютерів. Донецький національний університет і Донецький державний університет економіки і торгівлі мають у своєму розпорядженні достатню кількість комп'ютерних класів, які оснащені комп'ютерами останнього покоління. Другою найважливішою компонентою даного процесу є наявність сучасного програмного забезпечення, тобто розвинутих програмних засобів, призначених для рішення різноманітних задач із різноманітних галузей людської діяльності.

Рішення прикладних задач користувача в тієї або іншої області додатків підтримують пакети прикладних програм (ППП) вузько-спеціального, спеціального або загального призначення. Природно, кваліфікований користувач, що володіє в достатньому ступені однією з ефективних мов програмування (наприклад C, Pascal, Fortran, PL/I, Lisp, Prolog і ін.), у цілому ряді випадків для рішення своїх задач може самостійно розробити окрему програму або комплекс програм, що дозволяють реалізувати на персональному комп'ютері (ПК) алгоритм його задачі. Проте такий підхід потребує, як правило, серйозних витрат і при теперішній кількості різноманітного типу і призначення для ПК програмних засобів (ПЗ) у значній мірі стає недоцільним. Водночас, розвинуті пакети постачаються мовою програмування того або іншого рівня, що дозволяє в середовищі пакета програмувати цілі задачі або їхні окремі фрагменти, які недоцільно, неефективно, а в ряді випадків і неможливо, реалізовувати стандартними засобами пакета.

В даний час ПЗ, які орієнтовані на рішення математичних задач (при цьому, під математичною розуміється будь-яка задача, алгоритм якої може бути описаний у термінах того або іншого розділу математики), дуже великі й умовно можуть бути диференційовані на п'ять рівнів: (1) засоби різноманітного ступеня розвитку тієї або іншої системи програмування; (2) спеціальні мови програмування; (3) вузькоспеціальні; (4) спеціальні; (5) загальні пакети.

До першого рівня можуть бути віднесені такі системи програмування, як Basic, C, PL/1, Pascal-XSC і інші, до другого — Fortran, ISETL, Prolog і інші. Третій рівень може бути поданий як бібліотеками математичних підпрограм (SSP, NAG, ПНП-БИМ), так і вузько-спеціальними пакетами MacMath, Phaser, VossPlot, Eureka. До четвертого рівня можна віднести такі пакети як S-Plus, XploRe, SAS, StatGraf, SPSS, Dynamics, Macsyma, BMDP, PL/1-Formac, Systat. П’ятий рівень подають три основні математичних пакети MathCAD, REDUCE і MatLab.

Нарешті, сучасний розвиток комп’ютерних технологій орієнтований на створення інтегрованих математичних пакетів нового рівня, із котрих найбільше відомими є пакети Maple V і Mathematica. Дані пакети, перевершуючи по цілому ряді важливих показників згадані засоби п’ятого рівня, водночас успадковують ряд їхніх стандартів, що легко простежується при більш детальному їхньому розгляді.

Пакет Maple V підтримує як числові, так і символьні обчислення, дозволяючи дуже ефективно вирішувати задачі з багатьох розділів сучасної математики і математичні задачі в зазначеному нами розумінні з інших областей. Математичні конструкції виводяться на екран або принтер у стандартній математичній нотації (подібно пакету MathCAD). Пакет дозволяє легко комбінувати текст, графіку, обчислення. А розвинуті засоби анімації надають гарну можливість моделювати широкий клас різноманітних процесів і феноменів. Для візуалізації математичних моделей пакет має у своєму розпорядженні потужні двохвимірні і трьохвимірні графічні засоби. Широта математичних додатків забезпечується більш ніж 2500 умонтованими функціями, швидкістю і точністю обчислень. Розвинута умонтована мова дозволяє програмувати задачі або їхні фрагменти, для яких стандартні засоби пакета недостатньо ефективні або відсутні. Поряд з автономним характером використання дуже ефективним у ряді випадків здається використання його в сполученні з пакетом п’ятого рівня MatLab. Математичний пакет Maple V є лідером серед ПЗ даного типу і даного рівня.

Іншим цікавим засобом, що підтримує всі основні типи обчислень, є пакет Mathematica. В теперішній час даний пакет дозволяє достатньо ефективно робити чисельні (матричні операції, інтегрування, перетворення Фур'є, перебування коренів, рішення мінімаксних задач, лінійне програмування, обчислення різноманітних математичних функцій і ін.) і символьні (алгебраїчні перетворення, робота з поліномом, інтегрування, рішення рівнянь, матричні операції, робота зі списками й ін.) обчислення, підтримувати роботу з 2D і 3D мірною графікою на основі розвитої графічної мови, працювати із текстовою інформацією, а також має розвинуту інтерактивну символьну мову програмування і ряд інших цікавих засобів. Зараз пакет Mathematica є дуже популярним ПЗ для рішення задач математичного характеру в різноманітних прикладних і теоретичних областях сучасного природознавства.

Розумне, доцільне застосування в учбовому процесі програмного забезпечення дозволяє придбати якості, які іншими шляхами отримати або значно складніше, або зовсім неможливо. Ефективне використання можливостей, які надає робота з комп'ютером, зміщає акцент з викладача, що навчає, на студентів, які пізнають нові методи, на їх сумісну учбову діяльність. Цей напрямок навчального процесу орієнтований на активізацію діяльності всього колективу студентської групи, на досягнення цілей навчання і виховання самостійності особи студентів. Досвід застосування таких програм показує, що вони оказують суттєвий вплив на засвоєння певного об'єму знань, формування практичних навичок і їх творчих здібностей, мислення, навичок вибору необхідного інструментарію.

Практичні заняття з використанням комп'ютерних технологій, які є одним з елементів системи активних методів навчання у підготовці фахівців економічної спеціальності, мають бути органічно вплетеними в цю систему, в загальну структуру навчального процесу.

Слід зауважити, що поряд з сучасною комп'ютерною базою і новітнім програмним забезпеченням для вдосконалення учбового процесу шляхом впровадження комп'ютерних технологій необхідно також мати сучасного працівника вищої школи. Він повинен володіти науковим і педагогічним рівнем, що дозволяє в умовах, які постійно змінюються, приймати науково обгрунтовані педагогічні рішення на різного виду заняттях, володіти новими досягненнями наукової педагогічної мислі.

Корисним виявляються комп'ютерні тестові завдання, що дозволяють за короткий час (а це є дуже важливим в умовах постійного скорочення аудиторних годин) перевірити базові знання студентів по окремим темам і розділам курсу вищої математики.

Наприклад, варіант тестового завдання з теми "Границі" має вигляд:

Вибрати варіант правильної відповіді:			
1.	$\lim\limits_{x\to} \frac{x^3 + }{\sqrt{x^5} + }$	1.1. 0	1.3. 1
		1.2. ∞	1.4. 5/4
2.	$\lim\limits_{x\to} \frac{x^2}{x - }$	2.1. 4/7	2.3. ½
		2.2. ∞	2.4. 0
3.	$\lim\limits_{x\to} \frac{\sqrt{x} + \quad -}{x}$	3.1. 0	3.3. 1
		3.2. ∞	3.4. 1/2
4.	$\lim\limits_{x\to} \frac{tg 3x \sin 2x}{7x^2}$	4.1. 0	4.3. 1
		4.2. 3/2	4.4. 5/7
5.	$\lim\limits_{x\to} \left(\quad + \frac{4}{x - } \right)^{x-}$	5.1. 2	5.3. 1
		5.2. 3	5.4. 4

По темі “Похідна” варіант тестового завдання має вигляд:

Вибрати варіант правильної відповіді:				
1.	$y = \sqrt{2x+}$	1.1. $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2x+}}$	1.2. $y' = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{2x+}}$	1.3. $y' = \dfrac{1}{3}(2x+\ )^{-\frac{2}{3}}$
2.	$y = \cos 6x$	2.1. $y' = -\ \mathrm{in} 6x$	2.2. $y' = -\ \sin 6x$	2.3. $y' = -\ \sin 3x$
3.	$y = arctg\, 4x$	3.1. $y' = \dfrac{1}{1+\ 4x)^2}$	3.2. $y' = \dfrac{8}{1+\ x^2}$	3.3. $y' = \dfrac{4}{1+\ 6x^2}$
4.	$y = \dfrac{x}{\ln x}$	4.1. $y' = \dfrac{\ln x -}{\ln^2 x}$	4.2. $y' = \dfrac{\ln x -\ }{\ln^2 x}$	4.3. $y' = \dfrac{x\ln x -}{\ln^2 x}$
5.	$y = x^2 3^x$	5.1. $y' = 2x3^x + x^2 3^x \ln 3$	5.2. $y' = 2\cdot 3^x + x^2 3^x \ln 3$	5.3. $y' = 2x3^x + 3^x \ln 3$

Кожна правильна відповідь оцінюється одним балом. Оскільки для студента є природною п’ятибальна система оцінок, доцільно, що варіанти тестового завдання мають п’ять запитань.

Подібні комп’ютерні тестові програми розроблено таким чином, що вони мають значний набір завдань для кожного питання. Тому у разі нового тестування програма випадковим чином вибирає різноманітні завдання з цього набору. Таким чином, студенти повинні кожен раз відповідати на нові питання, що робить тестування індивідуалізованим, підвищує інтерес студентів до курсу, що вивчається, і активізує їх пізнавальну діяльність. Неупередженість комп’ютера, обмеженість часу на відповідь, вибір одного правильного з декількох варіантів відповідей викликають у студентів почуття об’єктивності і справедливості отриманої оцінки. А у разі негативної оцінки програму з тестовими завданнями можна повторювати ще до отримання бажаного результату.

Можливо також організувати проміжний вибірковий, загальний, індивідуальний контроль з теми або з усього розділу, обговорення потім його результатів. Такий підхід спрямований на формування у студентів адекватної самооцінки рівня знань.

Використання ПК надає можливість візуалізовувати отримані результати, що має певне значення при виборі оперативних рішень майбутніх фахівців. С другого боку, фахівець, який навчений таким чином, в практичній роботі може використовувати передові технології обробки інформації, що підвищіть ефективність його праці.

Водночас, автори вважають не кожне застосування ПК у навчальному процесі виправданим із погляду удосконалення методики викладання дисципліни. Наприклад, електронні підручники з вищої математики ніяк не можна рекомендувати для заміни лекційних і лабораторних занять, як це практикують в деяких вищих навчальній закладах. За своєю значущістю електронний підручник неможливо порівняти з особистим спілкуванням із викладачем, його умінням почувати аудиторію, змінювати темп, інтенсивність і форму подачі інформації. Електронний підручник може бути використаний у випадку пропуску лекції, для самостійної роботи після прослуховування теми або для повторення пройденого матеріалу перед іспитом. Прикладом сучасного електронного підручника є підручник “Multimedia Mathematics”, який має великі ілюстративні можливості. У процесі навчання вищій математиці немає необхідності навчати студентів умінню переходити від абстрактних математичних моделей до конкретних об’єктів практики. Однак, розуміючи, що інтерес студентів нематематичного профілю лежить саме в конкретній галузі, важливо активно формувати в них погляд практика, що використовує математичний апарат для рішення професійних задач.

Як показує досвід, великий інтерес викликають індивідуальні завдання, що пов’язані з рішенням математичних задач на ПК і мають яскраво виражену постановку з тієї області, яка доступна студентам на момент виконання роботи. Тому, для успішного розв’язання проблеми активізації пізнавальної діяльності необхідно, насамперед, досягти розумного сполучення між рівнями “чистої” математики і чисельними методами, між доведенням існування рішення простих модельних задач і побудовою стійких алгоритмів перебудування наближених рішень більш складних задач, між числом лекційних, практичних і консультаційних занять.

Не всі теми і розділи курсу вищої математики здаються авторам однаково виграшними з погляду виконання індивідуальних завдань на ПК і їхньої професійної спрямованості.

При вивченні теми “Границі” можливо тільки первинне знайомство з властивостями різних ППП.

Знаходити границі, за думкою авторів, доцільно за допомогою пакета Mathematica [1]. Для цієї мети пакет має спеціальні функції. Так знаходження границі $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+2}\right)^{x+6}$ має вигляд:

Limit [(1+3/(x+2))^(x+6), x->Infinity]

При вивченні диференціального та інтегрального числення є зручним застосування певних ППП для перевірки отриманих результатів. Студентам пропонують індивідуальні завдання, які необхідно виконати за правилами диференціювання й інтегрування, а потім результати обчислень перевірити на ПК за допомогою найбільш підходящого для даної задачі пакета. Наприклад, пакети Maple V [2] і Mathematica розташовують спеціальним оператором диференцювання. Знаходження першої похідної від функції $y=\frac{\cos x}{xe^{4x}}$ і інтегралу $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ для цих пакетів буде слідуючий мати вигляд.

За допомогою пакету Mathematica:

```
D[Cos[x]/x/E^(4*x), x]
Integrate [Sqrt[(1+x)/(1-x), x]]
```

За допомогою пакету Maple V:

```
> diff(cos(X)/X/exp^(4*X), X);
>int (Sqrt((1+X)/(1-X)),X);
```

При вивченні аналітичного дослідження функції однієї чи декількох змінних корисним буде побудова графіка функції, вивід його на монітор та створення твердої копії. Тому що саме зведення у сукупність всіх результатів аналітичного дослідження і потім побудова графіку функції викликають значні труднощі у студентів. Для досягнення цієї мети пакети Mathematica і Maple V мають умонтовану функцію plot з відповідними параметрами. Побудова графіку функції $y = \frac{2x-}{(x-\ )^2}$ у пакеті Maple V має вигляд:

>Y:=(2*X-1)/(X-1)^2;

>plot(Y(X),X=-10..10);

Найповніше комплексний характер індивідуального завдання розкривається при вивченні теми “Диференціальні рівняння”. Студентам пропонують задачі з області їхніх професійних інтересів. Шляхом введення формалізованих змінних опис процесу чи явища зводиться до диференціального рівняння визначеного типу з даними початковими або граничними умовами. Чисельне або аналітичне рішення диференціального рівняння за допомогою теоретичних знань та спеціальних комп’ютерних програм і інтерпретація отриманих результатів виробляє у студентів математичну культуру, навички самостійного ведення наукових досліджень.

Знаходження розв’язку диференціального рівняння $\frac{y}{1+\ ^2}y' = \ \mathrm{in}\,x$ має вигляд за допомогою пакету Mathematica:

Dsolve[y[x]/(1+y[x]^2)*y′[x] = = sin[x], y[x], x]

і за допомогою пакету Maple V:

>DE:=Y(X)/(1+Y(X)^2)*diff(Y(X),X)=sin(X);

>S:=dsolve(DE,Y(X));

Таким чином, досягається логіка переходу від простого до складного, від поверхневого використання окремих режимів математичних пакетів до глибокого синтезу теоретичних знань і умінь студента з застосуванням різноманітних властивостей програмного забезпечення. Дуже важливо, щоб на завершальному етапі вивчення курсу вищої математики студенти мали можливість виконання комплексного індивідуального завдання, що дозволить їм самостійно переконатися в значущості досліджуваного математичного апарата для подальшого навчання у даному навчальному закладі і для проведення науково-дослідної роботи і практичної діяльності.

1. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Введение в среду пакета Mathematica. – М.: Информационно-издательский дом “Филинъ”, 1997. – 368 с.
2. Манзон Б.М. Maple V Power Edition. – М.: Информационно-издательский дом “Филинъ”, 1998. – 240 с.

Резюме. Дан обзор пакетов прикладных программ, ориентированных на решение математических задач. Рассматриваются возможности применения компьютерных технологий при изучении высшей математики.

Summary. The survey of the article of applied programmes oriented on solving mathematical problems is given. The possibilities of usage computer technologies in study higher mathematics.

МОДЕЛЬ НАВЧАЛЬНОЇ ГРИ НА ЗАВЕРШАЛЬНОМУ ЕТАПІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИМ ДИСЦИПЛІНАМ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ ВУЗІВ

Л.І. Нічуговська, канд.економ.наук, доцент,
Полтавський кооперативний інститут

Ефективність методичної системи навчання математичним дисциплінам студентів вищого закладу освіти визначається, значною мірою, раціональним та вдалим поєднанням інформативних (традиційних) та активних (проблемних) методів навчання.

За традиційною методикою процес навчання відбувається у лекційно-практичній формі, яка, з одного боку, безсумнівно відіграє позитивну роль в якості інтегратора математичних знань. З іншого боку, існуюча система викладання по своїй суті лишається репродуктивною, орієнтованою на пасивне сприйняття інформації з досить слабкою стимуляцією самостійної когнітивної діяльності і тому потребує доповнення у вигляді активних методів навчання (ситуаційні завдання, різноманітні тренінги, управлінські та навчальні ігри тощо).

Навчальні ігри, як активний метод навчання, дають змогу посилити мотивованість навчально-пізнавального процесу та його емоційність, створити у студентів відчуття ефекту реальності модельованої ситуації, дістати негайну реакцію системи на задані дії, доповнити стратегію дій логікою математичних розрахунків, оцінити дії та знання студентів оцінкою та самооцінкою з позицій критерію ефективності навчальної ситуації, здійснити безпосередній перехід від теоретичних знань до набуття практичних навичок та формування економічного способу мислення. З позиції цілісності системи навчання як об'єкту управління, методика проведення навчальних ігор може містити наступні основні елементи:

– конкретний об'єкт імітаційного моделювання;
– мету і завдання гри;
– проблемну ситуацію, пов'язану з необхідністю математичного моделювання процесу прийняття управлінських рішень спеціалістами різноманітного фаху певних підрозділів підприємства (фірми, фінансової установи);
– структуру взаємозв'язків учасників, що виконують різні ролі і мають визначені функції;
– чітко розроблені правила і умови гри для всіх учасників гри;
– існування багатоваріантності рішень внаслідок дії фактору невизначеності;
– наявність системи ігрових оцінок та форм звітності для учасників навчальної гри.

Темою навчальної гри у курсі "Математика для менеджерів" може бути:

– модельна імітація практики планування, прогнозування та оперативного управління виробництвом (процесами, ресурсами, інвестиціями тощо), якщо в умову закладена можливість багатоваріантних підходів до розв'язання поставлених проблем;
– теоретичні положення певних розділів курсу, які можуть бути адаптовані до різноманітних економічних ситуацій шляхом перетворення математичними засобами апріорної та апостеріорної інформації про стан об'єкта та середовища у кількісні складові інформації керування, що сприяє обгрунтуванню прийняття певної стратегії оптимальної поведінки суб'єктами управління за умов невизначеності.

Методологічне забезпечення навчальної гри може бути представлено блочною структурою, а саме:

I блок – формулюється мета навчальної гри; обгрунтовується доцільність її проведення; визначаються знання, навички та вміння, які повинні бути закріплені студентами під час гри; встановлюється її місце в структурі математичних знань та фіксується її зв'язок з професійно-орієнтованими дисциплінами;

II блок – розкривається ідея навчальної гри: визначається множина ситуаційних завдань, які підлягають розв'язанню в процесі гри;

III блок – здійснюється вибір об'єкта ігрового моделювання; обгрунтовується інформаційна база, необхідна для проведення гри.;

IV блок – визначаються структурні етапи гри, її правила та набір критеріїв ефективності для оцінки множини допустимих рішень поставлених задач;

V блок – проводиться коригування, аналіз і оцінка ефективності навчальної гри взагалі та її учасників, зокрема.

Впровадження навчальних ігор в курс "Математика для менеджерів" створює принципово нові можливості в научуванні студентів економічних спеціальностей математичним знанням шляхом максимальної індивідуальної адаптації теоретичних знань до розв’язання типових прикладних задач економіки.

Основні моменти ігрового заняття розглянемо на прикладі навчальної гри “Оптимізація капіталовкладень”.

1. **Навчальна гра “Оптимізація капіталовкладень”** є завершальним етапом вивчення курсу “Математика для менеджерів”. Її мета – закріплення теоретичних знань студентів з дисциплін “Вища математика”, “Теорія ймовірностей” та “Дослідження операцій” та їх застосування до вироблення оптимальної стратегії діяльності деякої умовної компанії.
2. **Загальна постановка задачі.**

   Холдінгова компанія, до складу якої входять чотири виробничих підприємства та чотири торгових фірми, з реалізації готової продукції за минулий рік одержала прибуток у розмірі 10млн грн. Пропонується декілька варіантів його використання, а саме:

   1) часткове розміщення одержаного капіталу на депозитний рахунок у банк;
   2) інвестиції у власні підприємства з метою збільшення об’ємів випуску продукції підвищеного попиту;
   3) інвестиції в інші підприємства інших галузей.

   Необхідно оцінити ефективність даних напрямків вкладення капіталу, порівнюючи затрати з майбутніми прибутками в цінах поточного року; визначити доцільність збільшення обсягів продукції підвищеного попиту шляхом аналізу та прогнозування ринкової ситуації на даний момент часу; розглянути пропозиції інвестування в інші галузі народного господарства; проаналізувати залежність товарообігу торгових фірм від затрат на рекламу та розробити заходи по підвищенню їх ефективності.

   З урахуванням одержаних результатів потрібно сформулювати можливі стратегії діяльності холдінгової компанії та вибрати оптимальну.

3. **Підготовчий етап.**

Підготовка до навчальної гри починається за декілька днів до початку ігрових етапів і полягає в ознайомленні студентів із структурною схемою маркетингового дослідження (див. Рис. 1) та повторенні схеми аналізу маркетингової інформації, яка складається із статистичного банку та банку моделей.

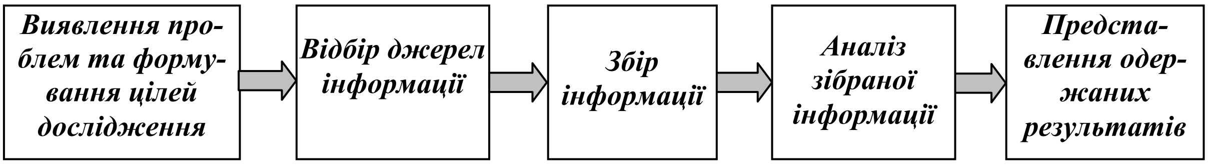


Рисунок 1

Статистичний банк – сукупність сучасних методик статистичної обробки інформації (регресійний аналіз, кореляційний, факторний, дисперсійний аналіз, тощо), що дозволяє встановити залежності у рамках певної вибіркової сукупності та оцінити міру їх статистичної надійності. Зауважимо, що ці методики дозволяють одержати відповіді на питання:

– Які основні змінні впливають на попит даного товару, яка ступінь їх впливу?
– - Чи збільшиться попит на товар, якщо ціну товару підняти на 10%, а затрати на рекламу – на 20%?
– Які характеристики є найбільш вірогідними показниками зростання попиту на певний товар?
– За якими змінними найкраще сегментувати ринок певного товару і як визначити загальну кількість сегментів даного ринку?

Банк моделей – це сукупність математичних моделей, які сприяють виробленню оптимальних маркетингових рішень діяльності в умовах ринку. Кожна модель складається із сукупності взаємопов'язаних змінних, що характеризують деякий реально існуючий процес і допомагають одержати відповідь на питання типу “що краще?”, “якщо величину незалежної змінної збільшити на одиницю, що станеться із залежною змінною?”.

Зауважимо, що при проведенні нашої гри, студенти обмежуються моделями табличного процесора Excel 97.

Крім того, на підготовчому етапі, обов’язкове тестування студентів-учасників , для того, щоб оптимально визначити рольові функції кожного учасника гри.

Результати діагностики дають можливість сформувати ігрові групи, а саме:

1) адміністративний відділ (викладач і два студенти з числа найбільш компетентних і віднесених до II психологічного типу особистості);
2) фінансовий відділ;
3) відділ аналізу та планування інвестицій;
4) рекламний відділ;
5) експертна рада.

З урахуванням постановки навчальної гри перед учасниками ставляться конкретні завдання.

Адміністративний відділ здійснює розподіл студентів, консультує при необхідності учасників гри, виступає у ролі арбітра, знайомить із структурною схемою правил гри, послідовності її етапів, системою оцінювання відповідно поставленим проблемам, забезпечує основний і додатковий (при необхідності) статистичний матеріал.

На підсумковому етапі на основі проведеного аналізу заслуховує пропозиції експертної ради та здійснює оцінку дій кожного відділу.

Перед фінансовим відділом ставиться завдання: проаналізувати доцільність вкладу одержаного прибутку у 10 млн грн. на депозитні рахунки в банки. При цьому можливі вкладення як в ощадний, так і у комерційний банки. У комерційних банках нараховується більший відсоток на вкладені суми порівняно з відсотком ощадного банку в залежності від строку договору, але внесок не гарантується, тобто завжди існує ймовірність банкрутства комерційного банку. Можливі варіанти умовної інформації представлені порівняльною таблицею.

	Строк договору	1 місяць	2 місяці	3 місяці	6 місяців	12 місяців
% нарахувань із щомісячною виплатою	ощадний банк	11%	13%	17%	18%	20%
	комерційний банк	21%	23%	27%	28%	30%
% нарахувань із поквартальною виплатою	ощадний банк				20%	21%
	комерційний банк				30%	31%

Отже, перед фінансовим відділом постає дилема: мати меншу, але гарантовану суму при вкладенні в ощадний банк, або більшу, проте з ризиком втратити і сам внесок.

З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний і внесок в ощадний банк.

Таким чином, проблема фінансового відділу у загальному вигляді полягає в наступному.

Знайти оптимальний розподіл прибутку у S млн грн. між двома банками, якщо x – внесок в ощадбанк, y – внесок у комерційний банк; α, β – відсоток нарахування відповідно в ощадному та комерційному банках; $(1 - p)$ – ймовірність банкрутства комерційного банку (нехай $p = 0{,}8$).

$V(y)$ – функція корисності для вкладників комерційного банку. Зауважимо, що вигляд функції корисності пропонується у декількох формах, що відповідають варіантам можливих стратегій для суб'єкта керування, тобто фінансового відділу, а саме:

1. $V(y)=\beta$ – зростаюча функція корисності для суб’єкта керування байдужого до ризику;
2. $V(y)=y^2,\ \ y\geq 0$ – зростаюча функція корисності зі схильністю до ризику.

При розподілі S млн грн. на x(млн грн.) та y(млн грн.) можливі ситуації щодо отримання дивідендів:

1. $(\alpha+\beta)$ – за умови успішного функціонування комерційного банку;
2. $(\alpha-\gamma)$ – за умови банкрутства комерційного банку.

Зауважимо, що джерелом невизначеності у даному випадку є комерційний банк.

Отже, необхідно реалізувати модель оптимізації розподілу грошей між банками, а саме:

Знайти максимальне значення функції

$$F(x,y)=(1-p)\cdot V(y)\cdot(\alpha-\gamma)+p\cdot V(y)\cdot(\alpha+\beta),$$

$$\text{якщо}\ \begin{cases} x+y=S \\ x\geq 0,\ \ y\geq 0 \end{cases}$$

Підставляючи різні значення для α та β *і вибираючи відповідну функцію корисності, одержимо кілька задач на знаходження умовного екстремуму функції двох змінних.*

Аналіз одержаних результатів дозволить запропонувати кілька стратегій у залежності від ставлення до ризику та відповідних відсотків нарахування.

Перед відділом планування інвестицій ставиться кілька завдань. По-перше, це проблема розподілу капіталовкладень у розмірі 10млн грн. між чотирма підприємствами з метою збільшення обсягів випуску продукції, що користується підвищеним попитом, якщо використання i-им підприємством x_i млн грн. із вказаної суми капіталовкладень забезпечує приріст випуску продукції, що визначається значенням нелінійної функції $g_i(x)$, i = 1,2,3,4 і відображений у таблиці:

Обсяг капітало-вкладень (млн грн.)	I, $g_1(x)$ (млн грн.)	II, $g_2(x)$ (млн грн.)	III, $g_3(x)$ (млн грн.)	IV, $g_4(x)$ (млн грн.)
0	0	0	0	0
2,0	0,5	0,6	0,6	0,7
4,0	0,8	1,0	1,1	1,1
6,0	1,2	1,4	1,5	1,6
8,0	1,8	1,8	2,0	2,0
10,0	2,1	2,3	2,4	2,5

Задача розв'язується методами динамічного програмування, для чого використовується рекурентне співвідношення

$$f_N(x_n) = \max_{0 \le x \le x_n} \left[g_N(x) + f_{N-1}(x_n - x) \right],$$

де f_N – визначає оптимальне управління системою на *N*-етапі, яке відповідає оптимальному управлінню попереднього стану системи, причому

$$f_1(x) = \max \left[g_1(x) \right] = g_1(x)$$

Розв'язавши поставлену задачу, знаходимо оптимальний розподіл капіталовкладень між підприємствами та максимальний приріст випуску продукції підвищеного попиту.

По-друге, відділ планування інвестицій аналізує можливості придбання двох пакетів акцій різних підприємств, наприклад, акцій виду А і В з нормами прибутку відповідно 20,0% та 25,0%. Ціна однієї акції виду А становить 500 тис.грн., а виду В – 200 тис.грн. Є пропозиція придбати не менше ніж 40% акцій виду А.

Отже, для прийняття рішення необхідно підрахувати сподівану норму прибутку інвестиційного портфеля із двох пакетів акцій та визначити величину його ризику, якщо ступінь ризику акції А $-\sigma_1 = 2{,}3\%$, акції В $-\sigma_2 = 2{,}8\%$, коефіцієнт кореляції між акціями $\rho_{12} = 0{,}3$.

Зауважимо, що варіація портфеля двох акцій може бути обчислена за формулою:

$$V_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2 \cdot \sigma_1\sigma_2\rho_{12},$$

яку можна знайти у переліку формул інформативного довідника, створеного для даної навчальної гри.

По-третє, відділ планування інвестицій розглядає можливість відкриття ще однієї торгової фірми – представника холдінгової компанії у новому районі. Попередні розрахунки показали, що це доцільно зробити, якщо щотижневий середній доход мешканців цього району перевищує 200 грн. Відомо, що дисперсія доходу $\sigma^2 = 200$.

Необхідно: а) визначити правило прийняття рішення, за допомогою якого базуючись на вибірці n = 100 та рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ можна встановити, що нова фірма буде прибутковою; б) обчислити ймовірність того, що при застосуванні правила прийняття рішення, одержаного при відповіді на питання пункту а), буде здійснена помилка другого роду, якщо дійсний середній доход за тиждень становить 230 грн.; в) вважаючи альтернативне значення генерального середнього доходу рівним 250 грн., розрахувати об'єм вибірки при якому ризик помилки першого роду не буде перевищувати 0,025, а ризик помилки другого роду не буде більшим 0,05.

<u>Торговому відділу та відділу реклами</u> за даними чотирьох торгових фірм, що рекламують свій товар різноманітними способами, необхідно визначити, чи існує вплив виду реклами (інформативна, порівняльна, нагадувальна, підкріплююча тощо) на зростання товарообігу.

Для цього у кожному із випадково відібраних чотирьох однотипних містах (в них були використані різні види реклами) були зібрані відомості про обсяги продажу товарів (у грош.од.) в чотирьох торгових фірмах і обчислені відповідні вибіркові характеристики.

Вид реклами	1	2	3	4
Обсяг продажу	140	150	148	150
	144	149	149	155
	142	152	146	154
	145	150	147	152
n_i	4	4	4	4
$\bar{x}^{(i)}$	142,75	150,25	147,5	152,75
S_i^2	4,92	1,58	1,67	4,92

Чи можна при 5%-ому рівні значущості вважати вплив доведеним?

Зауважимо, що розв'язання цієї проблеми вимагає застосування однофакторної моделі дисперсійного аналізу та перевірки статистичних гіпотез.

Експертна рада контролює процес гри, послідовність операцій і функцій її учасників, попередньо обумовлює можливі методи розрахунків, що будуть використані при реалізації навчальної гри. Учасники експертної ради слідкують за дотриманням правил гри, контролюють нормативний час на розв'язання певних проблем спільно з адміністративним відділом розробляють систему стимулювання гри у вигляді премій і штрафів та критерії системи оцінок (за рівнем знань навчального матеріалу з різних тем, за умінням виконання певних професійних функцій, за ступенем узгодженості дій учасників гри).

Підсумовуючи викладене, зазначимо, що організація і проведення навчальної гри на завершальному етапі навчання математичним дисциплінам направлена на забезпечення єдності і взаємозв'язку теорії і практики, на підтвердження того факту, що прийняття оптимального рішення практично неможливе без використання математичних засобів.

1. Геронимус Ю.В. Игра-модель-экономика. – М.: Знание, 1989.
2. Занько С.Ф., Тютюнник Ю.С., Тюнникова С.М. Игра и учение. В 2ч. – М.: Ассоциация «Профессиональное образование», 1992.
3. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. – К.: ТОВ “Борисфен-М”, 1996.

Резюме. В данной статье предложена методика проведення учебной игры на завершающем этапе обучения математическим дисциплинам студентов экономического вуза.

Summary. The article deals with the application of the training games during the last stage of math education of the economic department student.

ЗМІСТ

ДО ВІДОМОСТІ АВТОРІВ

В ЗБІРНИКУ ПУБЛІКУЮТЬСЯ ОРИГІНАЛЬНІ РОБОТИ З ДИДАКТИКИ МАТЕМАТИКИ, РОЗВИВАЮЧОГО НАВЧАННЯ, ЕВРИСТИКИ, ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ІДЕЙ ТА МЕТОДІВ У НАВЧАННІ.

МОВА ПУБЛІКАЦІЇ – УКРАЇНСЬКА, РОСІЙСЬКА, АНГЛІЙСЬКА.

Редколегія зберігає за собою право відхиляти роботи без обговорення та рецензування.

Витрати на публікацію сплачуються автором.

Об`єм статті від 6 до 10 сторінок.

Бажано раніше узгоджувати назву та об`єм роботи, надіслав її коротку анотацію.

Для публікації необхідно представити рекомендацію кафедри та відгук члена редакційної ради.

Автор надає:

1) 1 екземпляр статті (яку набрано у WORD, на білім папері розміром 297х210 мм, підготовленої для репродуктування на резографі (чіткий та контрасний друк);
2) дискету з файлом своєї роботи.

Формули та малюнки теж набираються на комп`ютері. Малюнки розміщуються усередині тексту (не окремо!).

Поля: ліворуч - 25 мм, праворуч - 25 мм, зверху - 25 мм, знизу - 25 мм.

Номери сторінок не проставляти !

Через 1 інтервал друкується: назва роботи великими жирними літерами симетрично, далі - пропуск рядка і ініціали та прізвище автора (авторів), науковий ступень, вчене звання – курсивом, рядковими літерами, з симетричним розміщенням, потім на другому рядку місце роботи та адреса для спілкування (адреса вказується за бажанням авторів)- курсивом, рядковими літерами. Після цього - пропуск рядка і йде початок тексту роботи. Текст друкується через 1,5 інтервали. Пропуск спочатку абзацу - 7 литер. Посилання на літературу розташовуються номерами у квадратних дужках. Список літератури йде у кінці роботи після пропуску рядка через 1 інтервал, без додаткових назв. Оформлення бібліографії стандартне (ГОСТ 7.5-88). Після статті та списка літератури (якщо він є) треба додати резюме на двох мовах, відмінних від тієї, котрою написано статтю через 1 інтервал.

Екземпляр рукописа повинен бути підписаний автором. На звороті останнього аркуша автор повинен вказати своє призвище, ім`я по батькові повністю, науковий ступень, вчене звання, місце роботи та посаду, наукового керівника (якщо він є), домашню та робочу адресу з індексом, домашній та робочий телефони, fax, E-mail (якщо є).

При пересиланні рукопис та дискету повинно розмістити не згинаючи поміж двома аркушами картону або покласти у папку.

МОЖЛИВЕ СПІЛКУВАННЯ ЕЛЕКТРОННОЮ ПОШТОЮ

РОБОТИ, ЯКІ НЕ ВІДПОВІДАЮТЬ ВКАЗАНИМ ВИМОГАМ, ПУБЛІКУВАТИСЯ НЕ БУДУТЬ!

Роботи надсилати за адресою: пр.Миру 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна, Хорольській Олені Вікторівні.

Fax: (38)–(0622)-927112 (Для Скафи О.І.).

E-mail: skafa@univ.donetsk.ua

E-mail: horol@bio.donetsk.ua

Контактні телефони:

Науковий редактор - доц. Скафа Олена Іванівна

Тел.:(38)-(0622)-919244 (р.), (38)-(0622)-554429 (д.), код для СНД (0622).

Відповідальний секретар - ст.викл. Хорольська Олена Вікторівна

Тел.:(38)-(0622)-992375 (р.), (38)-(062)-3378985 (д.).

Наукове видання

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ: ПРОБЛЕМИ І ДОСЛІДЖЕНЯ
МІЖНАРОДНИЙ ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

Випуск 14
Труди Міжнародної тнауково-методичної конференції "Евристичні методи у навчанні математики"

Рекомендовано до друку вченою радою Донецького національного університету 27.11.2000 (протокол №10).

Редакція збірника:
Науковий редактор – канд. пед. наук, доц. Скафа Олена Іванівна.
Тел.: (38)-(0622)-919244 (р.) (38)-(0622)-554429 (д.), код для СНД (0622).
E-mail: skafa@univ.donetsk.ua

Відповідальний секретар – ст. викл. Хорольська Олена Вікторівна
Тел.: (38)-(0622)-992375 (р.), (38)-(062)-3378985 (д.).
E-mail: Horol@bio.donetsk.ua

Адреса редакції збірника: Кафедра вищої математики та методики викладання математики. Донецький національний університет, вул. Університетська, 24, Донецьк, 83055, Україна

Узгоджені матеріали надсилати за адресою:
Хорольській О.В., пр.Миру, 29/63, Донецьк-15, 83015, Україна

Підписано до друку 29.11.2000 р. Формат 60х90/16. Папір типографський. Друк Офсетний. Умовн. друк. арк. 10. Тираж 300 прим. Замовлення № 269

Видавництво Донецької фірми наукоємних технологій НАН України
(Фірми ТЕАН)
Україна, 83050, Донецьк, а/я 435. E-mail: tean@an.dn.ua
Надруковано: Лабораторія комп'ютерних технологій Донецького національного університету, 83055, м.Донецьк, вул. Університетська, 24