

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
по курсу «Статистическая радиофизика»
Конспект лекций

УДК 621.38

Методические материалы по курсу «Статистическая радиофизика» (конспект лекций) для студентов специальности 6.070201 «Радиофизика и электроника» / Сост.: А.Ю. Липинский, А.Н. Рудякова. – Донецк: ДонНУ, 2008. - 60 с.

Приведены краткие теоретические сведения, представляющие собой конспект лекций по курсу «Статистическая радиофизика» для студентов специальности 6.070201 «Радиофизика и электроника».

Составители:

А.Ю. Липинский, доцент

А.Н. Рудякова, ст. преподаватель

Утверждено

на заседании кафедры радиофизики

Протокол № _____ от _____ 2008 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	2
1. ИЗМЕРЕНИЕ И АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК случайных процессов.....	4
1.1. Обнаружение сигнала на фоне шума.....	4
1.2. Измерение случайных процессов.....	6
1.3. Цифровая обработка случайных процессов.....	9
2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	12
2.1. Случайный одиночный импульс.....	12
2.2. Квазипериодические импульсные процессы.....	14
2.3. Случайные импульсные последовательности.....	15
2.4. Дробовой шум.....	16
2.5. Фотоотсчеты в случайном световом поле.....	18
3. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	21
3.1. Случайные узкополосные процессы.....	21
3.2. Случайные диффузионные процессы.....	25
3.3. Колебания, модулированные шумом.....	28
4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ РАДИОСИСТЕМАХ.....	34
4.1. Статистика случайных процессов.....	34
4.2. Фильтрация шума избирательными системами.....	35
4.3. Установление шумовых колебаний.....	37
4.4. Распределение вероятностей на выходе системы.....	38
4.5. Тепловые шумы.....	40
4.6. Выделение сигнала из шума.....	44
5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ и параметрических радиосистемах.....	51
5.1. Нелинейное преобразование сигналов.....	51
5.2. Амплитудное детектирование шума.....	54
5.3. Измерение слабых шумов.....	55
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	58
ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО КУРСУ «СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА».....	60

ВВЕДЕНИЕ

Радиофизика охватывает два направления: 1) изучение физических явлений, существенных для радиосвязи - генерации электромагнитных сигналов, излучения и распространения электромагнитных волн, приема радиосигналов; 2) изучение методами и средствами радиотехники различных объектов - атомных ядер, молекул, живых организмов, земной атмосферы, небесных тел и т. д. [1]. Статистическая радиофизика изучает случайные явления в радиофизических системах. Предметом статистической радиофизики являются в основном случайные электрические колебания и электромагнитные волны. Проблемы *флуктуаций* становятся все более существенными по мере увеличения чувствительности измерительных и приемных устройств, повышения точности измерений. Существование флуктуаций связано с наличием у всякой макроскопической системы большого числа степеней свободы. Последние могут быть макроскопическими и микроскопическими. Макроскопические флуктуации характерны для систем с распределенными параметрами. Примеры таких флуктуаций - турбулентность среды и волнение на поверхности моря. Микроскопические флуктуации обусловлены атомизмом вещества и электричества. Примеры таких флуктуаций -

1) тепловые флуктуации различных макровеличин - плотности, давления, температуры, силы тока, напряжения, напряженности электромагнитных полей; все они обусловлены тепловым движением микрочастиц и разнообразны по проявлению - броуновское движение, молекулярное рассеяние света в среде, тепловые шумы в радиотехнике и радиофизике, тепловое излучение тел и т. д.;

2) случайные вариации числа частиц в электронных потоках при термо- и фотоэмиссии - *дробовой эффект*, непосредственно обусловлен дискретностью микроскопических носителей заряда;

3) случайные локальные вариации эмиссионной способности катодов - *эффект мерцания*;

4) хаотическое перемагничивание доменов в ферромагнитных сердечниках, находящихся в переменном магнитном поле (*магнитные шумы*, эффект Баркгаузена).

Со статистическими задачами, сходными задачам статистической радиофизики, приходится сталкиваться в гидродинамике, акустике и физике плазмы (теория турбулентности, физика случайных линейных и нелинейных волн). Для статистической радиофизики, как и для всей физики в целом, большое значение имеет проблема возникновения статистики в нелинейных динамических систе-

мах [15]. Выяснилось, что перемешивание, или хаос, может возникать даже в системе с двумя степенями свободы и появление или отсутствие его зависит лишь от значений параметров или начальных условий задачи. Введение стохастического элемента в динамику среды может происходить за счет сложных нелинейных взаимодействий при отсутствии явных случайных сил. Возникло определение нового свойства нелинейных динамических систем - динамическая энтропия Колмогорова - Синая. Эта энтропия, будучи инвариантом системы, отразила в количественной форме возможность нелинейной системы совершать движение с перемешиванием.

1. ИЗМЕРЕНИЕ И АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Обнаружение сигнала на фоне шума

Сигнал - случайный физический процесс, отображающий передаваемую информацию. Задача - использовать статистическую теорию для обнаружения сигнала на фоне шума.

Постановка задачи. Наблюдатель измерил реализацию случайного процесса $x(t)$, представляющего собой а) шум либо б) смесь детерминированного сигнала $s(t)$ и шума. Пусть q - априорная вероятность случая а). При измерении получено $x(t_1) = x_1$ и $s(t_1) = s_1$. Пусть шум - гауссова помеха. Требуется найти, какому из двух случаев: а) или б), лучше соответствует результат измерения.

Решение задачи. Реализация случая а) или б) при измерении - достоверное событие. Поэтому априорная вероятность случая б) равна $p = 1 - q$. При гауссовой помехе функция распределения плотности вероятности случайной величины x_1 с дисперсией (средней мощностью шума) σ^2 в случае а) равна

$$w_{\text{ш}}(x_1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp(-x_1^2 / (2\sigma^2)), \quad (1.1)$$

а в случае б) равна

$$w_{\text{с+ш}}(x_1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp(-(x_1 - s_1)^2 / (2\sigma^2)). \quad (1.2)$$

Обозначим $x_{\text{п}}$ - пороговое значение сигнала. Процедура обнаружения сигнала сводится к сравнению: $x_1 > x_{\text{п}}$ - сигнал есть, $x_1 \leq x_{\text{п}}$ - сигнал пренебрежимо мал. Для вычисления $x_{\text{п}}$ применим критерий идеального наблюдателя. Последний обеспечивает минимальную вероятность ошибок обнаружения сигнала. Таких ошибок две. Первая - ложная тревога: по измерению $x_1 > x_{\text{п}}$ делается вывод, что сигнал есть, но на самом деле сигнала нет. Вероятность такой ошибки

$$P_1 = q \int_{x_{\text{п}}}^{\infty} w_{\text{ш}}(x) dx. \quad (1.3)$$

Вторая ошибка - пропуск сигнала, возникает, если сигнал есть, но, по измерению, $x_1 \leq x_{\text{п}}$ и делается вывод, что сигнала нет. Вероятность этой ошибки

$$P_2 = p \int_{-\infty}^{x_{\text{п}}} w_{\text{с+ш}}(x) dx, \quad (1.4)$$

и вероятность полной ошибки

$$P = P_1 + P_2 = q \int_{x_n}^{\infty} w_{\text{ш}}(x) dx + p \int_{-\infty}^{x_n} w_{\text{с+ш}}(x) dx. \quad (1.5)$$

Минимум P определяется из условия $dP/dx_1 = 0$ при $x_1 = x_n$. При учете (1.1), (1.2) и (1.5) имеем

$$x_n = (s_1 / 2) (1 - 2 \sigma^{-2} / s_1^2 \ln(p / q)). \quad (1.6)$$

Критерий обнаружения сигнала: $x_1 > x_n$, с учетом (1.6) имеет вид

$$x_1 s_1 > s_1^2 / 2 - \sigma^2 \ln(p / q). \quad (1.7)$$

Процедура вынесения решения по одному измерению груба. Поэтому проводят серию измерений в заданные моменты времени. Пусть для простоты результаты измерений в эти моменты времени статистически независимы. Чтобы обеспечить последнее хотя бы приближенно, надо задать достаточно большой шаг по времени, через который проводятся последующие измерения. Здесь учтено, что с увеличением искомого шага статистическая взаимосвязь результатов измерений ослабевает.



Рис. 1.1. Схема корреляционного приемника

По теореме перемножения вероятностей независимых событий [2, 3] многомерную функцию распределения плотности вероятности можно заменить произ-

ведением одномерных. Тогда функцию (1.1) следует заменить на $\prod_k w_c(x_k)$, а функцию (1.2) - на $\prod_k w_{c+u}(x_k)$, где $k=1, 2, \dots, n$ и n - число отсчетов по времени. Повторяя выкладки, вместо (1.7) получим

$$\sum_k x_k s_k > \sum_k s_k^2 / 2 - \sigma^2 \ln(p/q) = U_0, \quad (1.8)$$

где U_0 - порог обнаружения сигнала.

Рассмотренная задача - один из простейших примеров статистической процедуры обнаружения сигналов. Теория обнаружения сигналов к настоящему времени достаточно разработана [2, 3]. На рис. 1.1 показана схемная реализация условия (1.8) обнаружения сигнала с помощью корреляционного приемника.

1.2. Измерение случайных процессов

Пусть $x(t)$ - случайный эргодический стационарный процесс [2, 3]. Стационарность означает, что произвольная n -мерная функция распределения процесса не изменяется при одновременном сдвиге всех точек $t_1, t_2, \dots, t_n$ на оси времени на одну и ту же величину τ , то есть $w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$. Отсюда следует, что одномерное распределение вероятностей вообще не зависит от времени: $w(x, t) = w(x)$, а двумерное зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$, так что $w(x(t), x(t + \tau); t, t + \tau) = w(x, x_\tau, \tau)$, где $x_\tau = x(t + \tau)$. Эргодический процесс при временном усреднении теряет случайный характер так, что

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle x \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T x(t) dt, \quad (1.9)$$

где T - интервал усреднения, $\langle x \rangle$ - статистически среднее функции x , и $\langle x \rangle_T$ - среднее по времени функции x на интервале T .

Эргодический стационарный процесс можно представить как $x(t) = \langle x \rangle + \xi(t)$, где $\xi(t)$ - флуктуационная компонента этого процесса. После усреднения по времени дисперсия $\sigma_T^2 = \langle (\xi_T)^2 \rangle$ удовлетворяет условию $\sigma_T^2 \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ [2, 3]. В случае эргодического процесса ценность отдельной его реализации возрастает. Путем усреднения одной реализации по времени можно найти всевозможные статистические характеристики случайного процесса, не обращаясь к усреднению по ансамблю. В реальных условиях интервал усреднения T всегда ограничен по величине. При заданной точности ϵ оценки $\langle x \rangle$ посредством из-

мерений $\langle x \rangle_T$ можно оценить необходимый интервал усреднения T с помощью неравенства: $\sigma_T / \langle x \rangle \leq \epsilon$ [5]. На рис. 1.2 показана схема измерения средних по времени характеристик стационарного электрического шума $x(t)$.

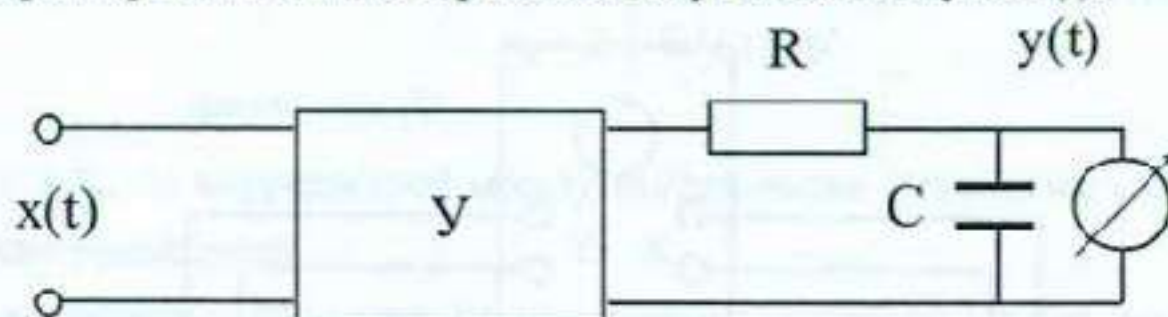


Рис. 1.2

После усилителя Y , воспроизводящего процесс $x(t)$ без искажений, стоит интегратор в виде RC - фильтра с эффективным временем усреднения $T_0 = RC$ [6]. Затем стоит прибор, измеряющий напряжение. С помощью интеграла наложения показания прибора описываются выражением [6]

$$y(t) = (k/T_0) \int_0^t \exp(-\theta/T_0) x(t-\theta) d\theta, \quad (1.10)$$

где k - коэффициент усиления усилителя.

Из (1.10) следует, что время усреднения T_0 должно быть достаточно велико ($T_0 \gg t$), чтобы можно было пренебречь искажением сигнала в интеграторе. Аналогичная схема может быть использована для определения остальных, кроме $\langle x \rangle$, моментов функции распределения $\langle x^m \rangle$, $m = 2, 3, \dots$ и т.д., если между усилителем и интегратором поставить соответствующий детектор. Инерционность детектора дает дополнительно погрешность при проведении измерений.

Теперь обсудим измерение вероятностей эргодических стационарных процессов. Пусть $P(x_1 < x < x_2)$ - вероятность того, что $x \in (x_1, x_2)$. Искомую вероятность можно определить по относительному времени пребывания реализации процесса в интервале (x_1, x_2)

$$P(x_1 < x < x_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} T_{x_1 x_2} / T, \quad (1.11)$$

где $T_{x_1 x_2}$ - суммарное время пребывания реализации процесса в интервале (x_1, x_2) за время измерения T .

Для электрических шумов измерение величины $T_{x_1 x_2}$ можно выполнить с помощью осциллографа. Необходимое время усреднения T может быть получено либо за счет выбора экспозиции при фотографировании с экрана трубки, либо за счет инерционности люминофора трубки. В последнем случае представление о распределении вероятности дает распределение яркости свечения по экрану.

Схема измерения двумерного распределения случайного стационарного процесса $w(x, x_\tau, \tau)$ с помощью электронного осциллографа показана на рис. 1.3, где X и Y - входы горизонтальной и вертикальной разверток.

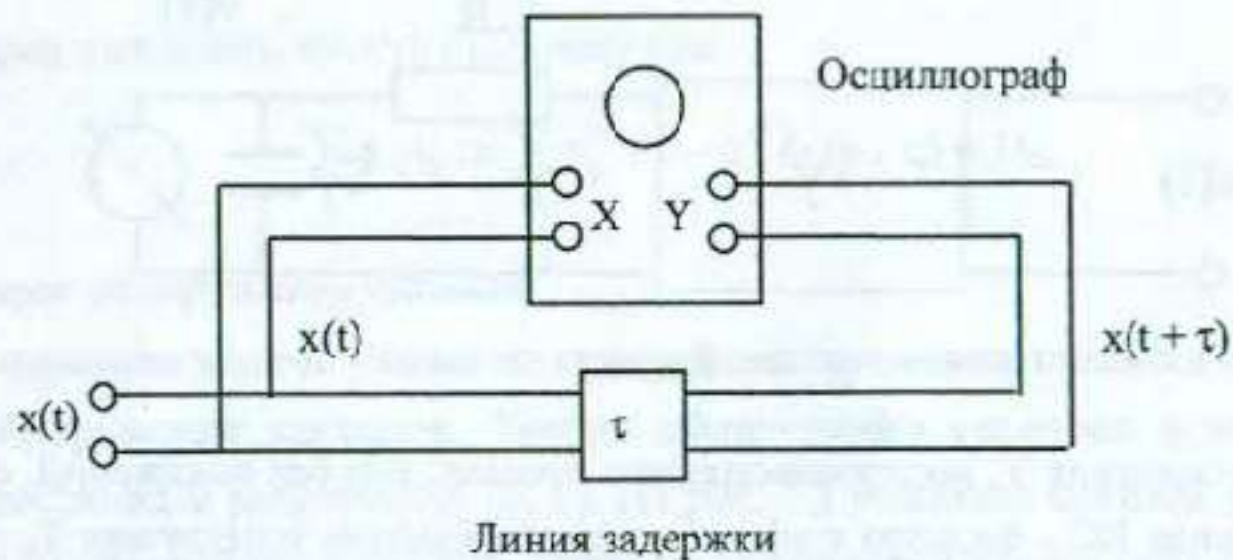


Рис. 1.3.

Задача. Используя схему измерений рис.1.3, исследовать форму изолиний линий равной яркости на экране осциллографа для нормального распределения

$$w(x, x_\tau, \tau) = (2\pi \sigma^2)^{-1} (1 - R^2)^{-1/2} \exp \{ -(x^2 - 2Rxx_\tau + x_\tau^2) / (2\sigma^2(1 - R^2)) \} \quad (1.12)$$

с дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $R(\tau)$ в зависимости от соотношения между временем задержки τ и временем корреляции процесса τ_k .

Необходимые сведения из теории случайных процессов [4. 6]. Статистическая связь между двумя сечениями $x(t)$ и $x_\tau = x(t + \tau)$ случайного процесса характеризуется корреляционной функцией

$$B(t, \tau) = \langle (x - \langle x \rangle) (x_\tau - \langle x_\tau \rangle) \rangle = \langle xx_\tau \rangle - \langle x \rangle \langle x_\tau \rangle, \quad (1.13)$$

где оператор статистического усреднения

$$\langle \dots \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} dx dx_\tau w(x, x_\tau; t, t + \tau), \quad (1.14)$$

и в нормированном виде ($-1 \leq R \leq 1$) - коэффициентом корреляции

$$R(t, \tau) = B(t, \tau) / (\sigma \sigma_\tau), \quad (1.15)$$

где σ^2 и σ_τ^2 - значения дисперсии (мощности флуктуаций) случайного процесса x в моменты времени t и $t + \tau$ соответственно $\sigma^2 = B(t, 0)$ и $\sigma_\tau^2 = B(t + \tau, 0)$.

Для случайного стационарного процесса $B(t, \tau) = B(\tau)$ и $\sigma = \sigma_\tau = \text{const}$. Характерный интервал времени, на котором происходит заметный спад (в несколько

раз) функции корреляции, называется *временем корреляции* τ_k . Время корреляции можно оценить как

$$\tau_k = 2 \int_0^{\infty} R^2(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Если $\tau > \tau_k$, то корреляцией между выбранными сечениями случайного процесса можно пренебречь.

Корреляционную функцию стационарного процесса можно определить также, заменив статистическое усреднение временным. Вместо (1.13) получим

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (\langle x x_\tau \rangle_T \cdot \langle x \rangle_T \langle x_\tau \rangle_T). \quad (1.17)$$

Решение. Линии равной яркости определяются условием $w(x, x_\tau, \tau) = \text{const}$. Используя (1.12), получаем, что искомые линии представляют собой в общем случае эллипсы и описываются уравнением $x^2 - 2Rxx_\tau + x_\tau^2 = \text{const}$. При $\tau \ll \tau_k$, когда $R(\tau) \approx 1$, вместо эллипсов приближенно получаем прямые линии: $(x - x_\tau)^2 = \text{const}$. Напротив, при $\tau \gg \tau_k$, когда $R(\tau) \approx 0$, получаем окружности $x^2 + x_\tau^2 = \text{const}$.

Схему рис. 1.3 можно использовать и для изучения одномерных функций распределения $w(x)$ по одномерному распределению яркости на экране осциллографа. Достаточно на Y - вход осциллографа подать исследуемый сигнал $x(t)$, а на X - пластины осциллографа подать сигнал развертки. Экспериментальная оценка функции корреляции (1.17) может быть проведена в два этапа. Для измерения величин $\langle x \rangle_T$ и $\langle x_\tau \rangle_T$ можно использовать схему рис. 1.2. Для измерения величины $\langle x x_\tau \rangle_T$ схему рис. 1.2 следует изменить, включив в нее дополнительно линию задержки и перемножитель сигналов. Перечисленные методы измерения и анализа случайных процессов называют *аналоговыми*. Широкие возможности цифровых ЭВМ в ряде случаев делают более предпочтительной цифровую обработку реализаций случайных процессов [6, 12, 16].

1.3. Цифровая обработка случайных процессов

В качестве примера обработки рассмотрим *дискретизацию* случайного непрерывного сигнала и обратную процедуру - *восстановление* непрерывного сигнала. Технически дискретизация осуществляется с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП), восстановление - с помощью цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП) [6, 17]. Это преобразование необходимо для непрерывного

сигнала, например, перед обработкой на цифровой ЭВМ или перед передачей по цифровому каналу связи. Передача информации в цифровой форме, а не в аналоговой позволяет повысить информационную емкость каналов связи, их помехоустойчивость, снизить затраты энергии на передачу.

Под дискретизацией понимается замена непрерывного сигнала $x(t)$, заданного на интервале $(0, T)$, совокупностью координат $c_1, c_2, \dots, c_N$. Простейшим является дискретное временное представление, когда $c_k = x(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Сигналов, которые одновременно имеют ограниченную длительность и ширину спектра, не существует. В реальных условиях длительность измерений всегда ограничена. В инженерных расчетах обычно учитывают ту часть спектра сигнала, в которой сосредоточено не менее 80 - 85 % его энергии. Для модели сигнала с ограниченным частотным спектром $(0, F)$ решение задачи о дискретизации и восстановлении решается на основе *теоремы Котельникова*. Формулировка теоремы: любая реализация случайного процесса с ограниченным спектром в интервале $(0, F)$ полностью определяется последовательностью ее значений в точках, отстоящих на $\Delta t_d = 1 / (2 F)$ секунд друг от друга, где Δt_d - интервал дискретизации [18]. Следствием теоремы Котельникова является *ортogonalное разложение Котельникова* для изучаемых сигналов

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t_d) \sin(2\pi F(t - k\Delta t_d)) / (2\pi F(t - k\Delta t_d)), \quad (1.18)$$

где $x(k\Delta t_d)$ - k -ый отсчет реализации случайного процесса.

Отметим, что разложение (1.18) может быть обобщено на случай сигналов с полосовыми спектрами (F_1, F_2) [18].

Необходимые сведения из теории случайных процессов [4, 6]. Представим флуктуационную компоненту $\xi(t) = x(t) - \langle x \rangle$ случайного процесса интегралом Фурье

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.19)$$

где ξ_{ω} случайная спектральная амплитуда.

Спектральная плотность мощности шума случайного процесса $G(\omega)$ описывает распределение интегральной мощности (дисперсии σ^2) шума по спектру

$$\sigma^2 = B(0) = \langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (1.20)$$

Для случайных стационарных процессов справедлива *теорема Винера-Хинчина*: Спектральная плотность $G(\omega)$ процесса оказывается Фурье-трансформантой корреляционной функции процесса

$$G(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau, \quad (1.21)$$

- прямое преобразование Винера - Хинчина и

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (1.22)$$

- обратное преобразование Винера-Хинчина.

Спектральные амплитуды ξ_{ω} и $\xi_{\omega'}$ случайного стационарного процесса δ -коррелированы, так что

$$\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = G(\omega) \delta(\omega + \omega'). \quad (1.23)$$

Так как $B(\tau)$ - четная функция: $B(\tau) = B(-\tau)$, то, согласно (1.21) и (1.22), $G(\omega)$ - также четная: $G(\omega) = G(-\omega)$. Эффективная ширина спектра шума случайного процесса может быть оценена как

$$\Delta\omega_{\text{ш}} = \sigma^4 / (4 \int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega). \quad (1.24)$$

С учетом (1.21) и (1.22) найдем связь между временем корреляции случайного процесса τ_k из (1.16) и шириной спектра его флуктуаций $\Delta\omega_{\text{ш}}$ из (1.24):

$$\Delta\omega_{\text{ш}} \tau_k = \pi. \quad (1.25)$$

Из (1.24) следует, что чем больше эффективная ширина спектра шума случайного процесса, тем меньше время корреляции процесса.

Приведенные сведения применим для выяснения физического смысла интервала дискретизации $\Delta t_d = 1/(2F)$ в (1.18). Передача информации посредством сигнала - случайный процесс. Поэтому передача возможна, если амплитудный спектр сигнала эффективно заключен внутри полосы спектра шума, то есть, если $2\pi F < \Delta\omega_{\text{ш}}$. Отсюда, с учетом (1.24), получаем $\Delta t_d > \tau_k$ (то есть соседние отсчеты должны быть некоррелированы).

Пример. У телефонного сигнала 95 % энергии заключено в полосе частот 300 - 3400 Гц. Примем $F=3400$ Гц, тогда частота дискретизации $1/\Delta t_d = 6800$ Гц.

2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Случайный одиночный импульс

Пусть момент появления импульса t_0 случаен и меняется от реализации к реализации, а форма импульса задана детерминированной функцией F . Представим импульс как

$$x(t) = F(t - t_0). \quad (2.1)$$

Процесс (2.1) характеризуется средним значением

$$\langle x \rangle = \int F(t - t_0) w(t_0) dt_0 \quad (2.2)$$

и корреляционной функцией

$$\langle x x_\tau \rangle = \int F(t - t_0) F(t + \tau - t_0) w(t_0) dt_0, \quad (2.3)$$

где $w(t_0)$ - плотность вероятности появления импульса в момент t_0 , и использовано другое, чем в (1.13), определение корреляционной функции.

Задача. Рассчитать среднее значение и функцию корреляции для импульса гауссовской формы

$$F(t) = F_0 \exp(-\alpha^2 t^2) \quad (2.4)$$

с длительностью $\tau_{\text{имп}} \sim 1/\alpha$ и при гауссовском распределении времени появления импульса

$$w(t_0) = (\beta / \pi^{1/2}) \exp(-\beta^2 t_0^2). \quad (2.5)$$

Решение. Подставляя (2.4) и (2.5) в (2.2) и (2.3), найдем

$$\langle x \rangle = F_0 \beta / (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \exp(-\alpha^2 \beta^2 t^2 / (\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.6)$$

$$\langle x x_\tau \rangle = F_0^2 \beta / (2 \alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \exp \{ -\alpha^2 / (2 \alpha^2 + \beta^2) (2 t^2 \beta^2 + 2 t \beta^2 \tau + \tau^2 (\alpha^2 + \beta^2)) \}. \quad (2.7)$$

Изучаемый в задаче случайный процесс нестационарен, так как $\langle x \rangle$ и $\langle x x_\tau \rangle$ зависят от времени t . Теперь вместо (2.5) примем, что появление импульса равновероятно на большом интервале времени: $T \gg \tau_{\text{имп}}$, то есть $w(t_0) = 1/T$. Тогда, вводя обозначение $\theta = t - t_0$, вместо (2.6) и (2.7), получим

$$\langle x \rangle = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.8)$$

$$\langle x x_\tau \rangle = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (2.9)$$

где $\langle x \rangle$ и $\langle x x_\tau \rangle$, как и все остальные моменты функции распределения, не зависят от времени t , так что процесс $x(t)$ стационарен.

Представим импульс $F(t)$ интегралом Фурье

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

и подставим (2.10) в (2.9). После преобразований получим выражение корреляционной функции через амплитудный спектр импульса $\varphi(\omega)$

$$\langle x x_\tau \rangle = (2\pi/T) \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (2.11)$$

Определим спектральную плотность мощности $G'(\omega)$ случайного процесса $x(t)$ посредством выражения

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G'(\omega) d\omega. \quad (2.12)$$

Полагая $\tau = 0$ в (2.11) и сравнивая полученное выражение с (2.12), найдем для одиночного импульса (2.1)

$$G'(\omega) = (2\pi/T) |\varphi(\omega)|^2. \quad (2.13)$$

Вместо (2.1) рассмотрим импульс со случайной структурой $\xi(t)$ и регулярной огибающей $F(t)$

$$x(t) = F(t) \xi(t). \quad (2.14)$$

Случайный процесс $x(t)$ из (2.14) - нестационарный процесс с дисперсией $\sigma_x^2(t) = F^2(t) \langle \xi^2(t) \rangle$ и коэффициентом корреляции $R_x = \langle x x_\tau \rangle / (\sigma_x(t) \sigma_x(t+\tau)) = \langle \xi \xi_\tau \rangle / \langle \xi^2 \rangle = R_\xi$, где R_ξ - коэффициент корреляции случайной модуляции $\xi(t)$ процесса $x(t)$. Полученный результат можно обобщить на пространственный импульс $A(x, y) = F(x, y) \xi(x, y)$, например, для распределения электромагнитного поля в поперечном сечении с координатами x и y лазерного луча: $R_A = R_\xi$.

2.2. Квазипериодические импульсные процессы

Такой процесс описывается выражением $x(t) = \rho(t) F(\psi)$, где $F(\psi)$ - периодическая функция ($F(\psi + 2\pi n) = F(\psi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), аргумент которой следующим образом зависит от времени $\psi = \omega_0 t + \varphi(t)$. Здесь $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ - флуктуирующие функции, определяющие случайные изменения импульсов по высоте и длительности. Примером такого процесса является телеграфный сигнал - случайная видеопоследовательность прямоугольных положительных и отрицательных импульсов со случайными длительностями τ_1 и τ_2 и детерминированными амплитудами σ и $-\sigma$ [19]. Пусть длительности импульсов распределены по показательным законам $w_k(\tau_k) = \lambda_k \exp(-\lambda_k \tau_k)$, где λ_k - параметры, $k = 1, 2$. Тогда телеграфный сигнал является случайным стационарным процессом с корреляционной функцией (см. (1.13))

$$B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad (2.15)$$

где $\tau = \tau_2 - \tau_1$, σ^2 - дисперсия процесса, $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$ - параметр, изменяя значения которого можно менять в широком диапазоне корреляционные и спектральные свойства телеграфного сигнала.

Используя (1.15), (1.16) и (2.15), найдем время корреляции телеграфного сигнала

$$\tau_k = 1 / \alpha. \quad (2.16)$$

Спектральную плотность мощности телеграфного сигнала найдем, используя преобразование Винера - Хинчина (1.21): $G(\omega) = \sigma^2 \alpha / (\pi (\alpha^2 + \omega^2))$. Ширину спектра телеграфного сигнала найдем, используя (1.25) и (2.16):

$$\Delta\omega_{ш} = \pi / \tau_k = \pi \alpha. \quad (2.17)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\Delta\omega_{ш} \rightarrow 0$, и процесс вырождается в постоянную составляющую. При $\alpha \rightarrow \infty$ и $\sigma^2/\alpha = \text{const}$ имеем: $\Delta\omega_{ш} \rightarrow \infty$ и $G(\omega) = G_0 = \sigma^2 / (\alpha\pi) = \text{const}'$, $B(\tau) = 2\pi G_0 \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ - дельта-функция, и процесс вырождается в белый шум. Название «белый шум» возникло по аналогии с понятием «белый свет» в оптике. Белый шум используют как модель наиболее тяжелого вида помехи в каналах связи. Белый шум - это δ -коррелированный случайный стационарный процесс с бесконечно большими значениями ширины спектра, дисперсии и энергии: $E = G_0 \Delta\omega_{ш} \rightarrow \infty$. В природе не существует источников сигналов с бесконечно большой энергией. Однако иногда помехи можно аппроксимировать

белым шумом. Это можно сделать, если ширина спектра помехи много больше ширины спектра полезного сигнала и в полосе частот сигнала спектральная плотность помехи $G_n(\omega) \approx \text{const}$.

2.3. Случайные импульсные последовательности

Этот процесс состоит из совокупности импульсов

$$x(t) = \sum_{p=1}^n F(t - t_p). \quad (2.18)$$

Здесь $F(t)$ - регулярная функция времени, описывающая форму одиночного импульса. Случайными могут быть как моменты появления отдельных импульсов t_p , так и полное число импульсов n за время наблюдения T . Исследуем статистические свойства последовательности (2.18) в следующих приближениях:

1) каждый импульс возникает независимо от остальных, и их появление равновероятно, так что $w(t_p) = 1/T$; 2) интервал T велик по сравнению с длительностью $\tau_{\text{имп}}$ каждого импульса: $T \gg \tau_{\text{имп}}$; 3) моменты t_p и число импульсов n - статистически независимые случайные величины. Тогда плотность вероятности

$$w(n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P(n) \prod_{p=1}^n w(t_p) = P(n) / T^n, \quad (2.19)$$

где $P(n)$ - вероятность появления n импульсов за время T , среднее по времени появления импульса t_p значение и корреляционная функция процесса F равны

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_p) w(t_p) dt_p = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.20)$$

$$\langle F F_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_p) F(t + \tau - t_p) w(t_p) dt_p = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (2.21)$$

где $\theta = t - t_p$, и в силу предположения 2) функции $\langle F \rangle$ и $\langle F F_\tau \rangle$ практически не зависят от t .

При предположениях 1) - 3) статистика числа импульсов подчинена закону Пуассона

$$P(n) = e^{-\alpha} \alpha^n / n!, \quad (2.22)$$

для которого среднее значение и дисперсия случайной величины n равны: $\langle n \rangle = \sigma_n^2 = \alpha$, и $\langle n^2 \rangle = \alpha(1 + \alpha)$; в пределе $n \rightarrow \infty$ распределение Пуассона переходит приближенно в нормальное, причем $\sigma_n / \langle n \rangle \rightarrow 0$.

При учете (2.19), (2.20) и (2.22) среднее значение для последовательности импульсов (2.18) равно

$$\langle x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(n, t_1, t_2, \dots, t_n) \sum_{p=1}^n F(t - t_p) dt_1 \dots dt_n = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.23)$$

где $\Omega = \alpha / T = \langle n \rangle / T$ и $\theta = t - t_p$, причем $\langle x \rangle = \langle x_\tau \rangle$ для произвольного $\tau \ll T$.

Используя ту же методику, что и при выводе (2.23), найдем корреляционную функцию процесса (2.18)

$$B(\tau) = \langle x x_\tau \rangle - \langle x \rangle \langle x_\tau \rangle = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta. \quad (2.24)$$

Итак, среднее значение и корреляционная функция пуассоновской импульсной последовательности даются формулами Кэмпбелла (2.23) и (2.24). Как известно [6], энергию импульса $F(\theta)$ можно выразить через амплитудный спектр импульса $\varphi(\omega)$ (см. (2.10)) с помощью равенства Парсеваля

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta) d\theta = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.25)$$

Сравнивая (1.20) с (2.24) при $\tau = 0$, получаем выражение для спектральной плотности мощности $G(\omega)$ пуассоновской последовательности импульсов

$$G(\omega) = 2\pi \Omega |\varphi(\omega)|^2. \quad (2.26)$$

2.4. Дробовой шум

Анодный ток электронной лампы - случайная последовательность импульсов. Флуктуирующая часть тока называется *дробовым шумом*. Статистика дробового шума зависит от статистики термоэлектронной эмиссии из катода и от взаимодействия электронов при пролете от катода к аноду. Пусть лампа работает в режиме насыщения. Тогда из двух факторов действует только первый. Различные термоэлектроны эмитируются из катода независимо друг от друга. Поэтому статистика термоэлектронной эмиссии, а значит и импульсов анодного тока, является пуассоновской (2.22). Последнее выражение определяет вероятность вы-

лета n электронов из катода за время T . Среднее число электронов, эмитируемых в единицу времени, равно $\Omega = I_0 / e$, где I_0 - средняя сила анодного тока и e - элементарный заряд. За время T в среднем эмитируется $\langle n \rangle = \Omega T$ электронов. Из (2.26) следует выражение для спектра мощности дробового шума: $G(\omega) = 2\pi \Omega |i(\omega)|^2$, где $i(\omega)$ - фурье-образ импульса тока $i(t)$, возбуждаемого в анодной цепи отдельным электроном.

Пусть в плоском ламповом диоде ось z направлена от катода к аноду и $z = 0$ на поверхности катода. При достаточно высоком анодном напряжении V можно пренебречь тепловым разбросом скоростей электронов и задать начальную (при $t = 0$) скорость электрона $u(0) = 0$ при $z = 0$. Проинтегрируем уравнение движения $m d^2 z / dt^2 = eE$ электрона с массой m , движущегося в однородном электрическом поле с напряженностью $E = V/d$, где d - расстояние между катодом и анодом. Получим выражение для скорости электрона $u(t) = (e/m)(V/d)t$. Мощность работы электрического поля по переносу электрона равна $P_1 = eEu(t)$. В единицу времени при протекании импульса анодного тока, вызванного электроном, в анодной цепи выделяется количество теплоты: $P_2 = i(t)V$. По закону сохранения энергии, имеем: $P_1 = P_2$. В результате получаем, что импульс тока, вызванный движением электрона между катодом и анодом, имеет треугольную форму и описывается выражением

$$i(t) = 2et / \tau_{\text{пр}}^2, \quad (0 < t < \tau_{\text{пр}}) \quad (2.27)$$

где $\tau_{\text{пр}}$ - время пролета электрона от катода к аноду, $\tau_{\text{пр}} = (2md / (eE))^{1/2}$.

Сила случайного тока последовательности импульсов равна

$$I(t) = \sum_n i(t - t_n) = (2e / \tau_{\text{пр}}^2) \sum_n a_n, \quad (2.28)$$

где $a_n = t - t_n$, если $0 < t - t_n < \tau_{\text{пр}}$, иначе $a_n = 0$.

Запишем Фурье-образ импульса тока

$$i(\omega) = (1/(2\pi))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = (e/(\pi\tau_{\text{пр}}^2)) \int_0^{\tau_{\text{пр}}} t e^{-j\omega t} dt. \quad (2.29)$$

Интегрируя (2.29), найдем

$$|i(\omega)|^2 = (e/(\pi\theta^2))^2 (2 + \theta^2 - 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta) = (e/(2\pi))^2 F(\theta), \quad (2.30)$$

где θ - пролетный угол, $\theta = \omega \tau_{\text{пр}}$, $F(\theta) = (4/\theta^4) (2 + \theta^2 - 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta)$.

Подставляя (2.30) в (2.26), получаем выражение для спектра мощности дробового шума

$$G(\omega) = (e / (2\pi)) I_0 F(\theta). \quad (2.31)$$

Согласно (2.31), частота колебаний ω входит в выражение (2.31) только в комбинации со временем пролета $\tau_{пр}$ ($\theta = \omega \tau_{пр}$), и спектральная плотность $G(\omega)$ пропорциональна средней силе анодного тока I_0 . При $\theta \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$) имеем $F(\theta) \rightarrow 1$, и спектральная плотность дробового шума максимальна:

$$G(\omega) = (e / (2\pi)) I_0. \quad (2.32)$$

Формула Шоттки (2.32) используется при расчете дробового эффекта низкочастотных ламп, когда $\theta \ll 1$. Напротив, при $\theta \rightarrow \infty$ получим $G(\omega) \rightarrow 0$, то есть при больших пролетных углах дробовой шум исчезает. При $\theta \rightarrow \infty$ резко уменьшается коэффициент усиления лампы. Поэтому увеличение θ не приводит к увеличению чувствительности усилителя. Добиться уменьшения уровня дробового шума можно, перейдя от режима насыщения к режиму ограничения анодного тока облаком отрицательного пространственного заряда электронов у катода. Наличие облака приводит к взаимодействию электронов. Статистика взаимодействия такова, что уровень дробового шума уменьшается. Данный эффект называется *депрессией дробового шума*. С учетом эффекта депрессии (2.32) перепишется как

$$G(\omega) = \Gamma (e / (2\pi)) I_0, \quad (2.33)$$

где Γ - коэффициент депрессии, на низких частотах обычно $\Gamma \approx 0,01$ вдали от режима насыщения.

2.5. Фотоотсчеты в случайном световом поле

Задача - изучить статистику фототока, возбуждаемого световым излучением на фотокатоде.

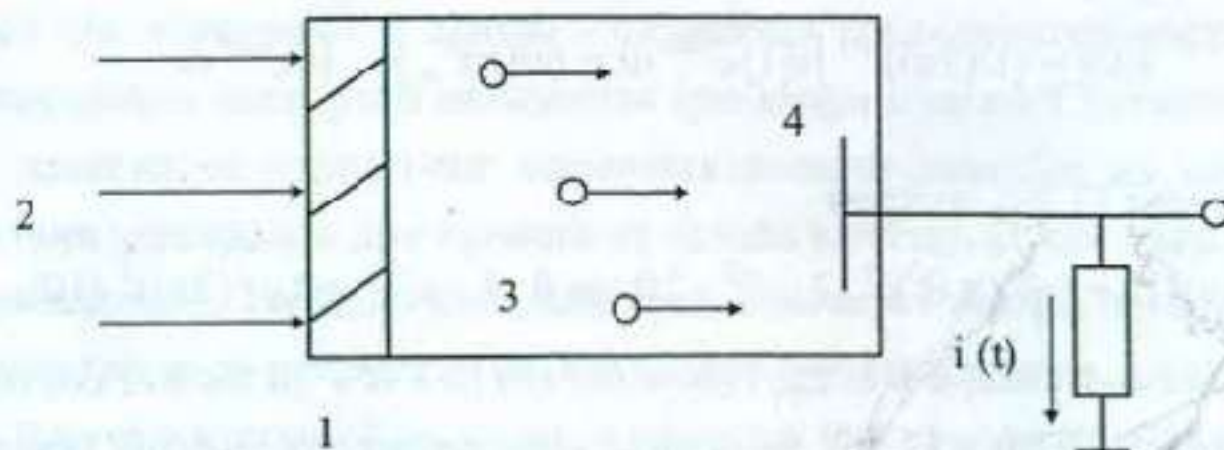


Рис. 2.1. Схема фотозлектрического детектора.

1 - катод (фоточувствительная поверхность); 2 - падающее световое излучение; 3 - эмитированные катодом фотоэлектроны; 4 - коллекторный анод; $i(t)$ - выходной ток; R - нагрузочное сопротивление

Катод освещается источником света с флуктуирующей интенсивностью $I(t)$. В задаче о термоэлектронной эмиссии (см. п. 2.4) такой постановке соответствовали бы флуктуационные изменения температуры катода, не учтенные в той задаче. Согласно полуклассической теории фотоэффекта [20], вероятность появления одного фотоотсчета (импульса фототока) за время T наблюдения равна $P_{от} = \beta U$, где β - коэффициент чувствительности фотодетектора и U - энергия светового потока, прошедшего через поверхность детектора за время T ,

$$U = \int_0^T I(t) dt.$$

Если флуктуации светового поля отсутствуют ($U = const$), то все фотоотсчеты равновероятны. Тогда статистика фотоотсчетов подчиняется закону Пуассона (2.22), причем $\alpha = \langle n \rangle = \beta U$. Если учесть дополнительно флуктуации светового поля, то вероятность (2.22) - условная вероятность при заданном числе фотоотсчетов n : $P(n|U) = (\beta U)^n / n! \exp(-\beta U)$ и $\langle n \rangle_U = \alpha = \beta U$. Полную вероятность появления n фотоотсчетов найдем, усреднив $P(n|U)$ при помощи функции распределения $w(U)$ энергии светового потока

$$P(n) = \int_0^\infty P(n|U) w(U) dU = \int_0^\infty (\beta U)^n / n! \exp(-\beta U) w(U) dU. \quad (2.34)$$

Распределение (2.34), называемое *формулой Манделя*, может существенно отличаться от пуассоновского из-за флуктуаций светового поля. Причем в случае (2.34) имеем $\langle n \rangle = \beta \langle U \rangle = \beta \langle I \rangle T$, и дисперсия числа фотоотсчетов в случайном световом поле $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle + \beta^2 \sigma_U^2$, где σ_U^2 - дисперсия энергии светового потока. Случайные поля можно различать по величине разности $\sigma_n^2 - \langle n \rangle$. Величина σ_U^2 существенно зависит от соотношения между временем корреляции светового поля τ_k и временем наблюдения T . В предельном случае $\tau_k \ll T$ статистика фотоотсчетов вообще не чувствительна к статистике светового поля. В этом случае имеем $w(U) = \delta(U - \langle U \rangle)$, где δ - дельта-функция, и вместо (2.34) получаем $P(n) = (\beta \langle U \rangle)^n / n! \exp(-\beta \langle U \rangle)$. То есть статистика фотоотсчетов будет пуассоновской независимо от распределения интенсивности света. Пусть теперь статистика светового поля является гауссовской. Как показа-

но в [5], тогда отклонение дисперсии числа фотоотсчетов от их среднего значения $(\sigma_n^2 - \langle n \rangle) / \langle n \rangle^2$ монотонно уменьшается с ростом относительного времени наблюдения T / τ_k . Поэтому для сохранения сведений о флуктуациях светового поля в статистике фотоотсчетов необходимо, чтобы $\tau_k > T$.

В другом предельном случае, когда $\tau_k \gg T$, имеем в (2.34): $U=IT$. В частности, для модели идеального лазера, работающего в надпороговом режиме, для которой $w(I) = \delta(I - I_0)$, где δ - дельта-функция, вместо (2.34) получим пуассоновское распределение (2.22) со средним и дисперсией $\langle n \rangle = \sigma_n^2 = \alpha = \beta T I_0$. Тепловое излучение, например лазерное, рассеянное в неоднородной среде, имеет экспоненциальное распределение интенсивности $w(I) = (1 / \sigma^2) \exp(-I / \sigma^2)$, где $\sigma^2 = \langle I \rangle$ [5]. Тогда получим функцию распределения $P(n) = \langle n \rangle^n / (1 + \langle n \rangle)^{1+n}$ со средним $\langle n \rangle = \beta T \sigma^2$ и дисперсией $\sigma_n^2 = \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle)$. Здесь величины $\langle n \rangle$ и σ_n^2 могут сильно отличаться друг от друга. Последнее распределение $P(n)$, в отличие от пуассоновского (2.22), дает функцию, убывающую с ростом n при любом $\langle n \rangle > 0$, не только при $\langle n \rangle < 1$.

Задача нахождения статистики светового поля по статистике фотоотсчетов является обратной к изученной выше. Решение задачи однозначно, но возможны разные методики его получения. Математически оно сводится к обращению формулы Манделя (2.34). Рассмотрим, например, функцию

$$Q(s) = \int_0^\infty e^{jsU} w(U) e^{-\beta U} dU, \quad (2.35)$$

Фурье-преобразование которой дает

$$w(U) = e^{\beta U} / (2\pi) \int_0^\infty e^{-jsU} Q(s) ds. \quad (2.36)$$

Если в (2.35) разложить экспоненту e^{jsU} в ряд Тейлора $e^{jsU} = 1 + jsU + \dots + (jsU)^n / n! + \dots$, и использовать формулу Манделя (2.34), то получим

$$Q(s) = \sum (j s / \beta)^n P(n). \quad (2.37)$$

Выражение (2.37) позволяет по распределению фотоотсчетов $P(n)$ найти функцию $Q(s)$. Затем с помощью (2.36) можно найти статистику светового поля $w(U)$.

3. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Случайные узкополосные процессы

Процесс называется *узкополосным*, если $\Delta\omega / \omega_0 \ll 1$, где $\Delta\omega$ - ширина спектра процесса и ω_0 - средняя (несущая) частота колебаний процесса. Реализации узкополосных процессов можно наблюдать на выходе радиосистем, работающих на высоких и промежуточных частотах. Используют две эквивалентные формы представления таких процессов: в виде амплитудно-частотно-модулированных колебаний или в виде суммы двух амплитудно-модулированных колебаний [6]

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t, \quad (3.1)$$

где $A(t)$ и $\Phi(t)$ - случайные амплитуда (огибающая) и начальная фаза процесса, $a(t)$ и $b(t)$ - случайные синфазная и квадратурная компоненты процесса, $a(t) = A(t) \cos \Phi(t)$ и $b(t) = -A(t) \sin \Phi(t)$, функции $A(t)$, $\Phi(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ медленно изменяются по сравнению с несущей частотой ω_0 .

Функции $a(t)$ и $b(t)$ можно рассматривать как ортогональные составляющие комплексной огибающей: $C(t) = a(t) + j b(t) = A(t) \exp(j \Phi(t))$, а сам процесс (3.1) - как вещественную часть комплексной функции: $x(t) = \operatorname{Re} \{z(t)\}$, где $z(t) = C(t) \exp(j \omega_0 t)$ [19]. Сигнал $C(t)$ называется *аналитическим*, если функции $x(t)$ и $y(t) = \operatorname{Im} \{z(t)\}$ составляют пару *преобразований Гильберта*

$$y(t) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) / (t - \tau) d\tau, \quad x(t) = - (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) / (t - \tau) d\tau. \quad (3.2)$$

Если процесс (3.1) имеет непрерывный спектр

$$\xi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.3)$$

то из (3.2) следует, что спектр сопряженной функции $y(t)$ выражается как

$$\xi_y(\omega) = -j \operatorname{sign} \omega \xi_x(\omega), \quad (3.4)$$

где знаковая функция $\operatorname{sign} \omega = 1$ (при $\omega > 0$), 0 (при $\omega = 0$) и -1 (при $\omega < 0$).

Из (3.4) следует, что прямое преобразование Гильберта $x \rightarrow y$ можно рассматривать как результат прохождения сигнала $x(t)$ через линейный четырехполюсник, сдвигающий фазу всех составляющих спектра на $-\pi/2$. Используя (3.2) и (3.4), легко выразить спектр аналитического сигнала $\xi_z(\omega) = 2 \xi_x(\omega)$ (при $\omega > 0$),

$\xi_x(0)$ (при $\omega = 0$) и 0 (при $\omega < 0$). Получили, что спектр аналитического сигнала является односторонним и существует только в области положительных частот. Обозначим спектральные плотности мощности процессов $x(t)$ и $y(t)$ как $G_x(\omega)$ и $G_y(\omega)$, соответственно. Используя выражение для спектра мощности случайного стационарного процесса (1.23) и (3.4), получим $G_x(\omega) = G_y(\omega)$. Тогда, применяя преобразование Винера - Хинчина (1.22) к функциям $G_x(\omega)$ и $G_y(\omega)$, найдем, что и корреляционные функции сопряженных процессов $x(t)$ и $y(t)$ одинаковы: $B_x(\tau) = B_y(\tau)$.

Задача № 1. Найти функцию корреляции узкополосного процесса $x(t)$ с равномерным спектром мощности $G_x(\omega) = G_x = \text{const}$ в интервале частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Решение. Используя (1.22), после интегрирования получим:

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 R_x(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad (3.5)$$

где дисперсия процесса $x(t)$ равна $\sigma_x^2 = B_x(0) = 2G_x\Delta\omega$; ширина спектра: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; коэффициент корреляции: $R_x(\tau) = \sin(\Delta\omega \tau / 2) / (\Delta\omega \tau / 2)$; величина $\sigma_x^2 R_x(\tau)$ равна корреляционной функции огибающей $A(t)$ изучаемого процесса (3.1).

Исследуем статистику огибающей и фазы узкополосного процесса (3.1). Алгоритм решения этой задачи следующий. Определяют совместную плотность распределения $w_{1,2}(a, b)$ случайных величин a и b . Находят якобиан преобразования J от системы координат A и Φ к системе координат a и b ($da db = J dA d\Phi$, где $J = A$). Из условия равенства вероятностей $dP(a, a + da, b, b + db) = dP(A, A + dA, \Phi, \Phi + d\Phi)$ получают совместную плотность распределения

$$w_{1,2}(A, \Phi) = J w_{1,2}(a, b). \quad (3.6)$$

Проинтегрировав (3.6) по фазе, получают одномерную плотность распределения огибающей

$$w_1(A) = \int_{-\pi}^{\pi} w_{1,2}(A, \Phi) d\Phi. \quad (3.7)$$

Проинтегрировав (3.6) по амплитуде, получают одномерную плотность распределения фазы

$$w_2(\Phi) = \int_0^{\infty} w_{1,2}(A, \Phi) dA. \quad (3.8)$$

Задача № 2. Исследовать статистику огибающей и фазы гауссовского стационарного узкополосного процесса (3.1) при следующих условиях: $\langle x(t) \rangle = 0$,

и случайные компоненты процесса $a(t)$ и $b(t)$ статистически независимы друг от друга $\langle a(t) b(t + \tau) \rangle = 0$ и имеют одинаковую дисперсию $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma^2$.

Решение. Учитывая условия задачи, с помощью (3.1) найдем $\langle a(t) \rangle = 0$, $\langle b(t) \rangle = 0$ и $\langle x^2(t) \rangle = \sigma^2$. Все моменты $\langle x^n(t) \rangle = 0$ при $n > 2$, так как процесс $x(t)$ нормальный. Тогда из (3.1) получаем $\langle a^n(t) \rangle = \langle b^n(t) \rangle = 0$ при $n > 2$, так что процессы $a(t)$ и $b(t)$ тоже нормальные. Из-за некоррелированности процессов $a(t)$ и $b(t)$ совместная плотность распределения $w_{1,2}(a, b)$ равна произведению одномерных плотностей: $w_{1,2}(a, b) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-a^2/(2\sigma^2)) (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-b^2/(2\sigma^2)) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-A^2/(2\sigma^2))$. Подставляя это выражение в (3.6), найдем: $w_{1,2}(A, \Phi) = A (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-A^2/(2\sigma^2))$. Далее, с учетом (3.7) и (3.8) получаем: $w_1(A) = A \times \sigma^{-2} \exp(-A^2/(2\sigma^2))$ (распределение Рэлея) и $w_2(\Phi) = 1/(2\pi)$. Среднее по функции распределения $w_1(A)$ значение огибающей равно $\langle A(t) \rangle = (\pi/2)^{1/2} \sigma$, а дисперсия огибающей - $\sigma_A^2 = \langle A^2(t) \rangle - \langle A(t) \rangle^2 = (4 - \pi) \sigma^2 / 2$. Так как распределение фазы $w_1(\Phi)$ равномерно и симметрично, то $\langle \Phi(t) \rangle = 0$ и дисперсия фазы равна: $\sigma_\Phi^2 = \langle \Phi^2(t) \rangle = \pi^2 / 3$.

Обобщим результаты изучения статистики узкополосных процессов. Рассмотрим сигнал, равный сумме гармонического колебания и узкополосной помехи (3.1)

$$z(t) = a_0 \cos \omega_0 t + x(t). \quad (3.9)$$

Выражение (3.9) - частный случай случайного процесса в виде смеси статистически независимых полезного сигнала и шума. Такая модель описывает процессы на выходе реальных приемных устройств. Аддитивный шум может накладываться на сигнал как в самом приемном устройстве, так и при распространении от передатчика к приемнику. Для процесса (3.9) случайные синфазная и квадратурная составляющие соответственно равны: $a_1(t) = a_0 + a(t)$ и $b_1(t) = b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ определены в (3.1). Огибающая и фаза процесса (3.9) соответственно равны: $A_1(t) = ((a_0 + a(t))^2 + b^2(t))^{1/2}$ и $\Phi_1(t) = \arctg(b(t) / (a_0 + a(t)))$.

Задача № 3. Изучить статистику огибающей и фазы смеси (3.9) гармонического сигнала и узкополосной помехи, удовлетворяющей условиям задачи №2.

Решение. Совместное распределение синфазной и квадратурной компонент процесса (3.9) описывается функцией $w_{1,2}(a_1, b_1) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-((a_1 - a_0)^2 + b_1^2)/(2\sigma^2))$. Совместная функция распределения амплитуды $A_1(t)$ и фазы $\Phi_1(t)$ равна $w_{1,2}(A_1, \Phi_1) = J w_{1,2}(a_1, b_1) = (A_1/(2\pi\sigma^2)) \exp(-(A_1^2 - 2A_1a_0 \cos \Phi_1 + a_0^2)/(2\sigma^2))$, где J - якобиан преобразования координат: $(A_1, \Phi_1) \rightarrow (a_1, b_1)$, $J = A_1$. Используя

формулы (3.7) и (3.8) применительно к функции $w_{1,2}(A_1, \Phi_1)$, найдем распределения огибающей

$$w_1(A_1) = (A_1 / \sigma^2) I_0(A_1 a_0 / \sigma^2) \exp(-(A_1^2 + a_0^2) / (2\sigma^2)), \quad (3.10)$$

где I_0 - модифицированная функция Бесселя [21], и фазы процесса (3.9)

$$w_2(\Phi_1) = 1 / (2\pi) \exp(-\mu^2) \{1 + \pi^{1/2} y \exp(y^2) (1 + \Phi_L(y))\}, \quad (3.11)$$

где $\mu = a_0 / (2^{1/2} \sigma)$, так что μ^2 - отношение мощности сигнала к мощности шума, $y = \mu \cos \Phi_1$ и $\Phi_L(y)$ - функция Лапласа [21],

$$\Phi_L(y) = 1/2 + 1/(2\pi)^{1/2} \int_0^y \exp(-u^2/2) du. \quad (3.12)$$

Формулы (3.10) и (3.11) иллюстрируются графиками на рис. 3.1, а, б, соответственно.

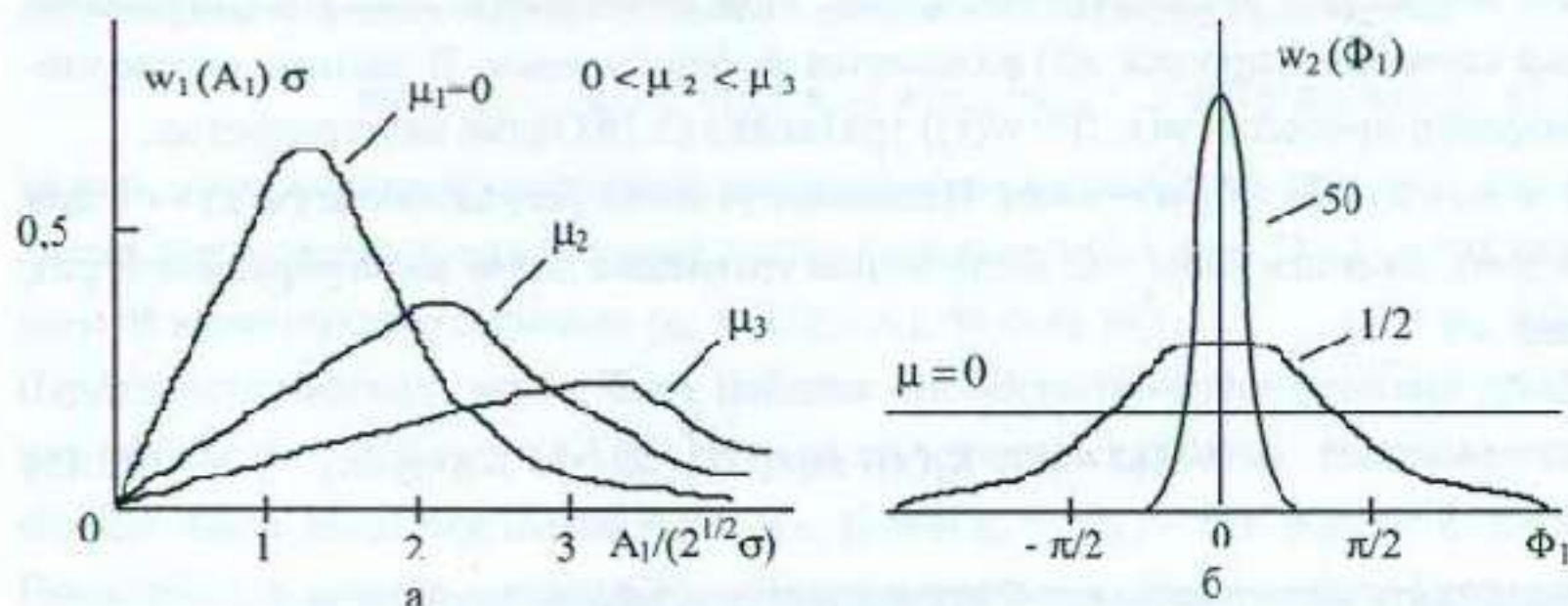


Рис. 3.1

На рис. 3.1 случай $\mu = 0$ соответствует распределению Рэлея (см. задачу № 2). При $\mu > 0$ графики на рис. 3.1 и формулы (3.10) и (3.11) описывают *обобщенное распределение Рэлея*. При малом отношении сигнал / шум ($\mu \ll 1$) обобщенное распределение Рэлея близко к обычному. При $\mu \gg 1$ распределение $w_1(A_1)$ стремится к нормальному со средним значением a_0 и дисперсией σ^2 , а распределение $w_2(\Phi_1)$ - к δ -функции.

3.2. Случайные диффузионные процессы

Пусть $x(t)$ - функция, описывающая случайный процесс и являющаяся решением стохастического дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^m a_k(t) d^k x(t) / dt^k = f(t), \quad (3.13)$$

где $a_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$, и $f(t)$ - случайные функции.

В зависимости от вида коэффициентов и правой части уравнения (3.13) в некоторых случаях оказывается, что $w(x, t)$ - функция распределения процесса $x(t)$, удовлетворяет уравнению Фоккера - Планка

$$\partial w / \partial t = - \partial / \partial x (K_1 w) + (1/2) \partial^2 / \partial x^2 (K_2 w), \quad (3.14)$$

где случайные функции $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$ зависят от коэффициентов и правой части уравнения (3.13); решение $w(x, t)$ уравнения (3.14) должно удовлетворять заданному начальному условию: $w(x, 0) = w_0(x)$.

Линейное уравнение (3.14) широко применяется в физике для описания диффузии вещества в неоднородных средах. При соблюдении принятых предположений случайный процесс $x(t)$ называется *диффузионным*. В частном случае стационарного процесса ($w(x, t) = w(x)$) уравнение (3.14) легко интегрируется:

$-K_1 w + (1/2) \partial/\partial x (K_2 w) = \text{const}$. Используя условие регулярности ($w(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$), получим $\text{const} = 0$. Полученное уравнение для w интегрируем еще раз, имеем

$$w(x) = (C / K_2(x)) \exp \left[2 \int_{-\infty}^x (K_1(x) / K_2(x)) dx \right], \quad (3.15)$$

где константа интегрирования C определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1. \quad (3.16)$$

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - n произвольно выбранных сечений процесса $x(t)$ в произвольно заданные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$. Используя условные вероятности, выразим n -мерную функцию распределения процесса

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) w(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \dots = \\ &= w(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) w(x_{n-1} | x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \cdot \dots \cdot w(x_2 | x_1) w(x_1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

При произвольных корреляционных функциях для $a_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$, и $f(t)$ в (3.13) значения $x(t)$ на разных и необязательно соседних временных интервалах: $t_{s-1} < t < t_s$ и $t_{p-1} < t < t_p$, вообще говоря, статистически взаимосвязаны. В частном случае δ -коррелированных функций $a_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, m$, и $f(t)$ указанная статистическая связь исчезает. Тогда случайная величина x_s не зависит от значений x , предшествующих x_{s-1} . Однако, чтобы проинтегрировать уравнение (3.13) на интервале времени $t_{s-1} < t < t_s$, надо знать начальные условия для $x(t)$ при $t = t_{s-1}$. Для уравнения первого порядка, когда $m = 1$ в (3.13), требуется только одно начальное условие - случайная величина x_{s-1} . Другими словами, x_s статистически зависит от x_{s-1} , но не зависит от предыдущих отсчетов. Тогда имеем

$$w(x_s | x_1, x_2, \dots, x_{s-1}) = w(x_s | x_{s-1}), \quad (3.18)$$

где $1 < s \leq n$.

Случайные процессы, для которых выполняется (3.18), называются *марковскими*. Из проведенного анализа следует, что марковскими являются случайные процессы, удовлетворяющие уравнениям (линейным или нелинейным) первого

порядка (или системам уравнений первого порядка) со случайными δ -коррелированными коэффициентами. Подставим (3.18) в (3.17), получим

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_n | x_{n-1}) w(x_{n-1} | x_{n-2}) \dots w(x_2 | x_1) w(x_1), \quad (3.19)$$

то есть многомерное стационарное распределение марковского процесса определяется стационарным одномерным распределением $w(x_1)$ вида (3.15) и так называемой вероятностью перехода $p_{ns} = w(x_n | x_s)$, то есть $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{ns} w(x_1)$. Вероятность перехода может быть найдена как нестационарное решение уравнения Фоккера - Планка (3.14), соответствующее начальному распределению $w(x, 0) = w_0(x)$, вида δ -функции $p_{ns} = w(x, t)$ при $x_n = x$, $x_s = x_0$ и $w_0(x) = \delta(x - x_0)$. Проведенный анализ позволяют сделать следующее заключение. Уравнения (3.13) с δ -коррелированными коэффициентами и правыми частями (с коэффициентом корреляции $R(\tau) = \delta(\tau)$) описывают диффузионные случайные процессы.

Исследуем важную модель случайного нестационарного процесса, который является интегралом по времени от некоторой случайной функции

$$\xi(t) = \int_0^t \eta(\theta) d\theta. \quad (3.20)$$

Функция $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) / dt = \eta(t). \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) описывает, например, флуктуации фазы в автономном генераторе радиодиапазона или в лазере, возникающие под действием собственного теплового, дробового или квантового шума. В теории броуновского движения уравнение (3.21) появляется, когда инерцией частиц пренебрегается. Тогда движение частиц определяется балансом силы вязкости и случайной силы, возникающей из-за соударений между ними.

Пусть статистические свойства процесса $\eta(t)$ заданы $\langle \eta \rangle = 0$, $\langle \eta^2 \rangle = \sigma_0^2$ и, с учетом преобразования Винера - Хинчина (1.22), $\langle \eta \eta_\tau \rangle = B_0(\tau) = 2 \int_0^\infty G_0(\omega) \cos \omega \tau d\omega$.

Учитывая (3.20), получим

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = 2 \int_0^\infty (t - \tau) B_0(\tau) d\tau = 2 \int_0^\infty G_0(\omega) (\sin(\omega t / 2) / (\omega / 2))^2 d\omega. \quad (3.22)$$

Отсюда видно, что дисперсия σ^2 процесса $\xi(t)$ зависит от времени, то есть данный процесс является нестационарным. Пусть τ_k - время корреляции процесса $\eta(t)$. На малых интервалах времени $t \ll \tau_k$, на которых функция $B_0(\tau)$ успевает измениться мало ($B_0(\tau) \approx \sigma_0^2$), найдем $\sigma^2 \approx \sigma_0^2 t^2$. При больших $t \gg \tau_k$ полагаем: $B_0(\tau) \approx 0$, так что $\sigma^2 \approx 2D(t - \tau_0)$, где $D = \pi G_0(0) = \int_0^\infty B_0(\tau) d\tau$, $\tau_0 = (1/D) \int_0^\infty \tau B_0(\tau) d\tau$.

Пример. Изучим винеровский диффузионный процесс. Тогда в (3.20) функция $\eta(t)$ - белый шум. При этом $G_0(\omega) = G_0$, $\sigma_0^2 = \infty$, $B_0(\tau) = 2D \delta(\tau)$, где $D = \pi G_0$. Подставляя полученное выражение для $B_0(\tau)$ в (3.22), получим $\sigma^2 = 2Dt$, то есть дисперсия линейно растет со временем. Найдем корреляционную функцию винеровского процесса: $B(t, \tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle$. Для этого подставим (3.20) в последнее выражение, получим: $B(t, \tau) = 2Dt$ при $\tau > 0$; $B(t, \tau) = 2D(t + \tau)$ при $-t < \tau \leq 0$; $B(t, \tau) = 0$ при $\tau \leq -t$.

3.3. Колебания, модулированные шумом

Изучим статистические характеристики случайных процессов, возникающих за счет случайной модуляции гармонического сигнала по частоте, фазе или амплитуде. Статистические характеристики огибающей и фазы модулированного колебания предполагаются известными из измерений или теоретически. Эта задача является обратной к изученной в п. 3.1. Приведем примеры возникновения колебаний, модулированных шумом. Воздействие электромагнитного шума на лазер или радиогенератор приводит к стохастической модуляции колебаний генератора за счет нелинейности воздействия шума. Другой пример - уширение спектральных линий излучения и поглощения атомов и молекул. Частоты, амплитуды и фазы колебаний поля излучения случайным образом изменяются при взаимодействии таких частиц.

Амплитудная модуляция. АМ-колебание описывается выражением

$$\xi(t) = a_0 [1 + \eta(t)] \cos(\omega_0 t + \Phi_0). \quad (3.23)$$

Шумовая АМ обеспечивается случайным процессом $\eta(t)$. Пусть $\eta(t)$ - стационарный процесс, начальная фаза Φ_0 - случайная постоянная величина с равномерным распределением $w(\Phi_0) = 1/(2\pi)$, $-\pi < \Phi_0 \leq \pi$, a_0 и ω_0 - постоянные величины. Тогда процесс $\xi(t)$ - стационарный со случайной огибающей $A(t) = (1 +$

+ $\eta(t)a_0$. Предполагая, что $\langle \eta \rangle = 0$ и $\langle \eta \eta_\tau \rangle = B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$, с помощью (3.23) находим

$$\langle \xi \rangle = 0, \langle \xi \xi_\tau \rangle = B(\tau) = (a_0^2 / 2) (1 + B_0(\tau)) \cos \omega_0 \tau. \quad (3.24)$$

Применяя преобразование Винера - Хинчина (1.21), найдем спектр процесса $\xi(t)$:

$$G(\omega) = (a_0^2 / 4) (\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega) + G_0(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 + \omega)). \quad (3.25)$$

Измеряемый спектральными приборами спектр мощности $G^+(\omega) = 2 G(\omega)$ при $\omega \geq 0$ и $G^+(\omega) = 0$ при $\omega < 0$ наиболее просто выглядит, если спектр АМ уже ω_0 , то есть $G_0(\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_0$. Тогда этот спектр симметричен относительно несущей частоты ω_0 :

$$G^+(\omega_0 + \Omega) = G^+(\omega_0 - \Omega) = (a_0^2 / 2) (\delta(\Omega) + G_0(\Omega)), \quad (3.26)$$

где Ω - смещение частоты ω относительно ω_0 ($0 < \Omega < \omega_0$).

Спектр (3.26) имеет две компоненты - дискретную и непрерывную. Дискретная расположена на несущей частоте ω_0 , а непрерывная повторяет по форме спектр модулирующего шума $G_0(\omega)$. Выразим функцию распределения АМ-процесса (3.23). Пусть его огибающая $A(t)$ и фаза $\Phi(t) = \omega_0 t + \Phi_0$ статистически независимы друг от друга. Так как $w(\Phi_0) = 1/(2\pi)$, то и $w_2(\Phi) = 1/(2\pi)$. Совместная функция распределения огибающей и фазы равна: $w_{1,2}(A, \Phi) = w_1(A) \times w_2(\Phi) = w_1(A) / (2\pi)$. От переменных A и Φ перейдем к переменным: $\xi = A \cos \Phi$ и $\psi = A \sin \Phi$. Якобиан преобразования координат $(A, \Phi) \rightarrow (\xi, \psi)$ равен: $J = 1 / A$. Совместное распределение в переменных ξ и ψ выражается как $w_{1,2}(\xi, \psi) = J w_{1,2}(A, \Phi) = w_1(A) / (2\pi A)$. Отсюда найдем функцию распределения огибающей АМ-процесса

$$w_1(\xi) = \int_{\xi=\text{const}} w_1(A) / (2\pi A) d\psi = (1 / (2\pi)) \int_{|\xi|}^{\infty} w_1(A) / (A^2 - \xi^2)^{1/2} dA. \quad (3.27)$$

Фазовая модуляция. Рассмотрим квазигармоническое колебание с постоянной амплитудой A_0 и случайной флуктуирующей фазой $\Phi(t)$:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Phi(t)). \quad (3.28)$$

Пусть фазовая модуляция является стационарной гауссовской

$$w(\Phi) = 1 / (2\pi\sigma_0^2)^{1/2} \exp(-\Phi^2 / (2\sigma_0^2)), \quad (3.29)$$

где $-\infty < \Phi < \infty$.

Для распределения (3.29) получим $\langle \Phi \rangle = 0, \langle \Phi \Phi_\tau \rangle = B_0(\tau) = \sigma_0^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0 e^{j\omega\tau} d\omega$. Для того же распределения найдем средние $\langle e^{j\Phi} \rangle = \langle e^{-j\Phi} \rangle = \exp(-\sigma_0^2/2)$ и $\langle \exp(j(\Phi \pm \Phi_\tau)) \rangle = \exp(-\sigma_0^2(1 \pm R_0(\tau)))$. Используя последние выражения, теперь найдем среднее $\langle x \rangle$ и корреляционную функцию: $B(t, \tau) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, ФМ-колебания (3.28)

$$\langle x \rangle = A_0 \exp(-\sigma_0^2/2) \cos \omega_0 t, \quad (3.30)$$

$$B(t, \tau) = (A_0^2/2) \exp(-\sigma_0^2) (\exp B_0(\tau) - 1) (\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)). \quad (3.31)$$

Выражения (3.30) и (3.31) показывают, что ФМ-колебание (3.28) является случайным нестационарным процессом. Соответствующими приборами измеряются средние по времени спектральные и корреляционные характеристики. Проводя в (3.31) усреднение по периоду колебания на несущей частоте $T = 2\pi / \omega_0$, получим

$$\langle B(t, \tau) \rangle_T = (A_0^2/2) \exp(-\sigma_0^2) (\exp B_0(\tau) - 1) \cos \omega_0 \tau. \quad (3.32)$$

Найдем средний спектр флуктуаций ФМ-колебания

$$\begin{aligned} \langle G(\omega) \rangle_T &= (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} \langle B(t, \tau) \rangle_T e^{-j\omega\tau} d\tau = (A_0^2/(8\pi)) \exp(-\sigma_0^2) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} (\exp B_0(\tau) - 1) (\exp(j(\omega_0 - \omega)\tau) + \exp(-j(\omega_0 + \omega)\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.33)$$

и среднюю интегральную по спектру мощность флуктуаций

$$\langle \sigma^2 \rangle_T = \langle B(t, 0) \rangle_T = (A_0^2/2) (1 - \exp(-\sigma_0^2)). \quad (3.34)$$

Усредним по периоду T полную статистически среднюю мощность ФМ-колебания $\langle x^2 \rangle = \sigma^2 + \langle x \rangle^2$, с учетом (3.30) и (3.34) получим $\langle \langle x^2 \rangle \rangle_T = A_0^2/2$. Таким образом, средняя статистически и по времени мощность ФМ-колебания постоянна и равна мощности немодулированного колебания. Другими словами, модулируя фазу, можно изменить спектр колебания, но не его среднюю интегральную интенсивность. Этот вывод справедлив не только при гауссовской, но и при любой другой статистике ФМ. В (3.28) зависимость $x(t)$ от $\Phi(t)$ нелинейная. Поэтому спектр ФМ-колебания, вообще говоря, имеет совершенно другую форму, чем спектр модулирующего шума. Исключением является лишь случай

слабой ФМ: $|B_0(\tau)| \leq \sigma_0^2 \ll 1$, когда $\exp B_0(\tau) - 1 \approx B_0(\tau)$. Тогда из (3.33) получаем $\langle G(\omega) \rangle_T \approx (A_0^2/4) (G_0(\omega - \omega_0) + G_0(\omega + \omega_0))$. Таким образом, при слабой ФМ спектр ФМ-колебания по форме приближенно повторяет спектр модуляции. Напротив, при глубокой ФМ ($\sigma_0^2 \gg 1$) имеем $\exp B_0(\tau) \gg 1$ для основной по энергии части спектра. Кроме того, $B_0(\tau)$ быстро уменьшается при отклонении τ от нуля, так что $\exp B_0(\tau) - 1 \approx \exp(\sigma_0^2 R_0(\tau)) \approx \exp(\sigma_0^2(1 - \alpha^2 \tau^2/2))$. В результате получим $\langle G(\omega) \rangle_T \approx (A_0^2/(4\alpha(2\pi)^{1/2})) (\exp(-(\omega - \omega_0)^2/(2\alpha^2 \sigma_0^2)) + \exp(-(\omega + \omega_0)^2/(2\alpha^2 \sigma_0^2)))$. При глубокой ФМ колебание имеет гауссовский спектр независимо от формы спектра самой модуляции. Спектр $\langle G(\omega) \rangle_T$ намного шире спектра $G_0(\omega)$: $\Delta\omega_0 \sim \alpha$, $\Delta\omega \sim \alpha\sigma_0$, так что $\Delta\omega/\Delta\omega_0 \gg 1$.

Частотная модуляция. Рассмотрим квазигармоническое колебание

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \int_0^t \eta(\theta) d\theta) = A_0 \cos \Phi(t). \quad (3.35)$$

В отличие от ФМ (3.28) при ЧМ случайный процесс с заданными характеристиками $\langle \eta \rangle = 0$, $\langle \eta \eta_t \rangle = B_0(\tau) = \sigma_0^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$ входит под знак интеграла. В (3.35) мгновенная частота колебания $\omega(t) = d\Phi(t)/dt = \omega_0 + \eta(t)$ испытывает модуляцию по случайному закону $\eta(t)$. Фаза

$$\varphi(t) = \int_0^t \eta(\theta) d\theta \quad (3.36)$$

является случайным диффузионным процессом.

Выражение для дисперсии $\langle \varphi^2(t) \rangle$ дается выражением (3.22). Используя результаты анализа выражения (3.22) в п. 3.2, заключаем, что в установившемся режиме частотной модуляции ($t \rightarrow \infty$) дисперсия фазовых флуктуаций растет со временем по линейному закону: $\sigma^2 = 2Dt$, где $D = \pi G_0$. То есть дисперсия фазы $\varphi(t)$ неограниченно растет со временем. Тогда независимо от вида статистики частотной модуляции распределение фазы $w(\varphi)$, приведенное к интервалу 2π , с течением времени стремится к равномерному (как у белого шума)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(\varphi) = 1/(2\pi), \quad (-\pi < \varphi < \pi) \quad (3.37)$$

Из (3.37) следует, что ЧМ-колебание в установившемся режиме является стационарным процессом. Для определения функции распределения $w_1(\xi)$ ЧМ-колебания с равномерным распределением фазы можно использовать фор-

мулу (3.27). При постоянной амплитуде A_0 функция распределения амплитуды: $w_1(A) = \delta(A - A_0)$. Подставляя последнее выражение в (3.27), получаем одномерное распределение ЧМ-колебания в установившемся режиме

$$w_1(\xi) = \begin{cases} 1/(2\pi\sqrt{(A_0^2 - \xi^2)}) & (|\xi| \leq A_0) \\ 0 & (|\xi| > A_0) \end{cases} \quad (3.38)$$

Из (3.38) следует, что $\langle \xi \rangle = 0$, то есть в спектре ЧМ-колебания нет дискретной составляющей на несущей частоте ω_0 .

Конкретизируем полученные результаты для случая ЧМ-модуляции шумом $\eta(t)$, распределенным по гауссовскому закону. При этом гауссовскими будут и флуктуации фазы $\varphi(t)$ из (3.36). Выше было показано, что при ЧМ дисперсия фазовых флуктуаций $\sigma^2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому в пределе $t \rightarrow \infty$ получим (см. вывод формул (3.30) и (3.31))

$$\langle \exp(j\varphi) \rangle = \langle \exp(j(\varphi + \varphi_\tau)) \rangle = 0, \quad (3.39)$$

$$\langle \exp(j(\varphi - \varphi_\tau)) \rangle = \langle \exp(-j \int_0^\tau \eta(\theta + t) d\theta) \rangle = \exp(\sigma^2(|\tau|)/2). \quad (3.40)$$

Используя выражение (3.22) для σ^2 , а также (3.39) и (3.40), можно получить корреляционную функцию ЧМ-колебания (3.35)

$$B(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = (A_0^2/2) \exp(-\sigma_0^2 \psi(\tau)) \cos \omega_0 \tau, \quad (3.41)$$

где $\psi(\tau) = \sigma^2(|\tau|)/(2\sigma_0^2)$ и среднее берется по распределению (5.38).

В частности, из (3.41) следует $\langle \xi^2 \rangle = B(0) = A_0^2/2$, то есть ЧМ, как и ФМ, не изменяет интегральной по спектру мощности $G(\omega)$ интенсивности колебания $\langle \xi^2 \rangle$. Функция $\psi(\tau)$ при малых значениях τ изменяется по квадратичному закону, а при больших - по линейному закону

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \tau^2/2 & (\tau \ll \tau_0) \\ (D/\sigma_0^2)(|\tau| - \tau_0) & (\tau \gg \tau_0) \end{cases} \quad (3.38)$$

где τ_0 - время корреляции для случайного процесса $\eta(t)$, $D = \pi G_0(0)$.

Если интенсивность модуляции велика: $\tau_0^2 \sigma_0^2 \gg 1$, то $B(\tau)$ в (3.41) успеет уменьшиться почти до нуля на квадратичном участке (см. (3.42)). Тогда вместо (3.41) получим приближенно

$$B(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = (A_0^2/2) \exp(-\sigma_0^2 \tau^2/2) \cos \omega_0 \tau. \quad (3.43)$$

Применим преобразование Винера - Хинчина (1.21) к выражению (3.43):

$$G(\omega) = (A_0^2 / (4(2\pi)^{1/2} \sigma_0)) (\exp(-(\omega - \omega_0)^2 / (2\sigma_0^2)) + \exp(-(\omega + \omega_0)^2 / (2\sigma_0^2))), \quad (3.44)$$

то есть спектр ЧМ-колебания - гауссовский, ширина спектра: $\Delta\omega \sim \sigma_0$.

Сравним ширину $\Delta\omega$ спектра ЧМ-колебания с шириной $\Delta\omega_0$ спектра частотных флуктуаций $\eta(t)$. Величину $\Delta\omega_0$ выразим, используя (1.25), как $\Delta\omega_0 = \pi/\tau_0$. В результате получим оценку: $\Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim \sigma_0/\Delta\omega_0 = (\sigma_0^2/\Delta\omega_0^2)^{1/2} \sim (\sigma_0^2\tau_0^2)^{1/2} \gg 1$. То есть при интенсивной ЧМ-модуляции спектр шума ЧМ-колебания намного шире спектра шума, модулирующего частоту. Рассмотрим другой предельный случай - слабой (или достаточно быстрой) модуляции: $D\tau_0 \ll 1$. Тогда заметное уменьшение корреляционной функции $B(\tau)$ происходит на линейном участке (3.42). Вместо (3.41) получим

$$B(\tau) = (A_0^2 / 2) \exp(-D|\tau|) \cos \omega_0\tau. \quad (3.45)$$

Применим преобразование Винера - Хинчина (1.21) к выражению (3.45):

$$G(\omega) = (A_0^2 D / (4\pi)) (1/(D^2 + (\omega - \omega_0)^2) + 1/(D^2 + (\omega + \omega_0)^2)). \quad (3.46)$$

Спектр мощности (3.46) имеет вид лоренцевской кривой, ширина спектра: $\Delta\omega \sim D = \pi G_0(0)$. Отношение ширины спектра ЧМ-колебания к ширине спектра модуляции частоты равно $\Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim D\tau_0 \ll 1$. Значит, при слабой ЧМ-модуляции спектр шума ЧМ-колебания более узкий, чем у шума, модулирующего частоту.

4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ РАДИОСИСТЕМАХ

4.1. Статистика случайных процессов

Случайный процесс $\xi(t)$ на входе системы выразим через спектральную амплитуду процесса ξ_{ω} , используя преобразование Фурье (1.19). Случайный процесс $x(t)$ на выходе системы с постоянными параметрами выразим через передаточную функцию $K(\omega)$ или импульсную характеристику $H(t)$ системы [6]:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\theta) H(t - \theta) d\theta. \quad (4.2)$$

Пусть $\xi(t)$ - стационарный шум $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi \xi_{\tau} \rangle = B_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$, из (1.23) имеем $\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = \langle \xi_{\omega} \xi_{-\omega'}^* \rangle = G_{\text{вх}}(\omega) \delta(\omega + \omega')$; усредняя (1.19), найдем $\langle \xi_{\omega} \rangle = 0$, а из (4.1) - $\langle x \rangle = 0$. Функция корреляции стационарного процесса на выходе

$$\langle x x_{\tau} \rangle = B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (4.3)$$

Используя (1.22) для четных функций $B(\tau)$ и $G(\omega)$, имеем

$$B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) следует связь спектров шума на входе и выходе линейной системы с постоянными параметрами

$$G_{\text{вых}}(\omega) = G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2. \quad (4.5)$$

Интегрируя (4.5), найдем полную дисперсию стационарных флуктуаций на выходе системы

$$\langle x^2 \rangle = \sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.6)$$

Когда параметры системы непостоянны, передаточная функция зависит и от времени $K(\omega, t)$. Тогда процесс на выходе уже нестационарный. Если на входе

системы действует белый шум $G_{вх}(\omega)=1/(2\pi)$, то из (4.3) найдем функцию корреляции процесса на выходе

$$B_0(\tau) = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (4.7)$$

Обратное к (4.7) преобразование Фурье дает

$$|K(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в (4.3), выразим корреляционную функцию на выходе

$$B_{вых}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau + \tau') B_{вх}(\tau') d\tau' - \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau') B_{вх}(\tau + \tau') d\tau'. \quad (4.9)$$

4.2. Фильтрация шума избирательными системами

Об устройствах, изменяющих форму спектра шума, говорят как о фильтрах. Для линейных систем фильтрация описывается выражением (4.5). Максимумы резонансной кривой $|K(\omega)|^2$ приходятся на резонансные частоты избирательной системы. На рис. 4.1 качественно показаны резонансные кривые и спектры мощности входного шума для двух предельных случаев а) и б).

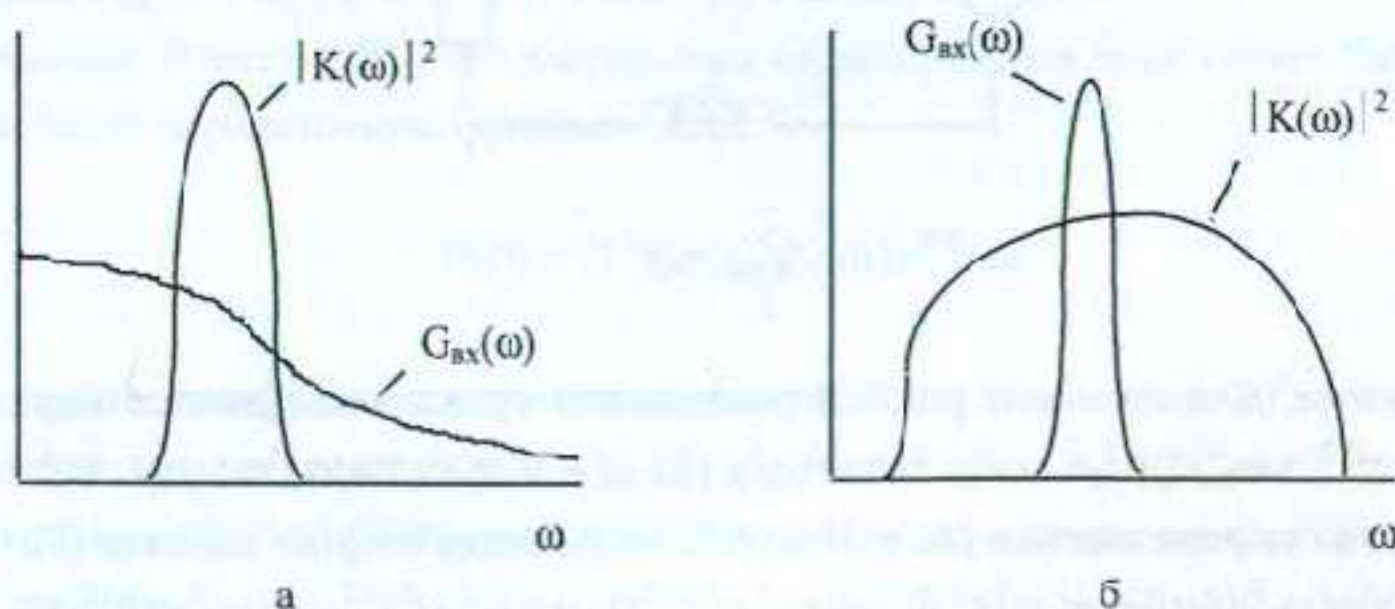


Рис. 4.1

В случае а) спектр $G_{вх}(\omega)$ мало меняется в пределах полосы пропускания системы, то есть $G_{вых}(\omega) \sim |K(\omega)|^2$, и эффект фильтрации выражен наиболее сильно.

В случае б) величина $|K(\omega)|^2$ почти постоянна в пределах основной части спектра $G_{\text{вх}}(\omega)$, то есть $G_{\text{вых}}(\omega) \sim G_{\text{вх}}(\omega)$, и фильтрация почти не проявляется.

Задача № 1. Найти корреляционную функцию шума тока на сопротивлении R схемы фильтра НЧ на рис. 4.2, где действует генератор белого шума $i(t)$.

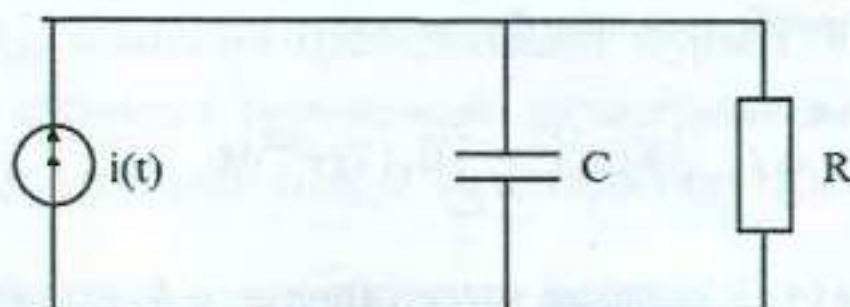


Рис. 4.2

Решение. Для схемы на рис. 4.2 резонансная кривая описывается выражением $|K(\omega)|^2 = \alpha^2 / (\alpha^2 + \omega^2)$, где $\alpha = 1/(RC)$. Подставляя это выражение для $|K(\omega)|^2$ в (4.7) и применяя теорию вычетов [22], найдем $B_0(\tau) = (\alpha/2) \exp(-\alpha |\tau|)$.

Задача № 2. Найти корреляционную функцию шума напряжения на емкости C колебательного контура (см. рис. 4.3), где действует э.д.с. белого шума.

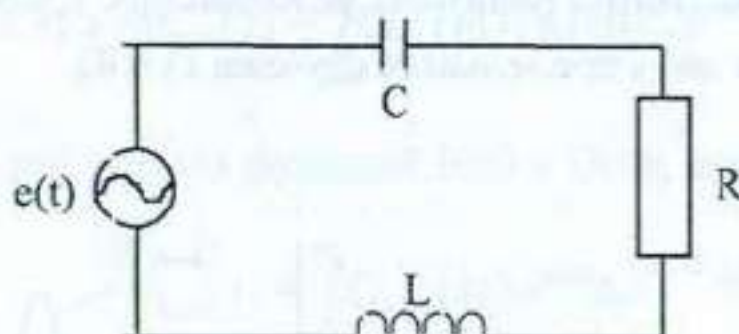


Рис. 4.3

Решение. Для схемы на рис. 4.3 резонансная кривая описывается выражением $|K(\omega)|^2 = \omega_0^4 / ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2)$, где $\alpha = R/(2L)$ и $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$. Подставляя это выражение для $|K(\omega)|^2$ в (4.7) и применяя теорию вычетов [22], найдем $B_0(\tau) = (\omega_0^2/(4\alpha)) \exp(-\alpha |\tau|) [\cos((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \tau) + \alpha/(\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \sin((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \tau)]$.

4.3. Установление шумовых колебаний

Предположим, что стационарный шум $\xi(t)$ ($\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi \xi_\tau \rangle = B_{\text{ш}}(\tau)$) начал действовать на систему в момент $t = 0$. На входе системы действует сигнал

$$f(t) = I(t) \xi(t), \quad (4.10)$$

где $I(t)$ - ступенчатая единичная функция, $I(t) = 1$ при $t > 0$ и $I(t) = 0$ при $t < 0$.

Для описания нестационарных процессов удобно использовать не спектральный (4.1), а временной подход (4.2). Подставив (4.10) в (4.2) (вместо $\xi(t)$), выразим сигнал на выходе системы

$$x(t) = \int_0^t \xi(t - \theta) H(\theta) d\theta. \quad (4.11)$$

Используя (4.11), выразим дисперсию нестационарного шума на выходе

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \langle x^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t H(\theta) H(\theta') B_{\text{ш}}(\theta - \theta') d\theta d\theta'. \quad (4.12)$$

Если система устойчива, то импульсная характеристика затухает со временем $H(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и $\sigma_{\text{вых}}^2$ стремится к установившемуся значению (4.6).

Задача. Для схемы колебательного контура (см. рис. 4.3) исследовать дисперсию шумовых колебаний напряжения на емкости C со временем при переходном процессе, вызванном включением э.д.с. белого шума с корреляционной функцией $B_{\text{ш}}(\tau) = \delta(\tau)$ (см. п. 2.2) в контуре в момент $t = 0$.

Решение. Известно [6], что импульсная характеристика цепи может быть выражена через передаточную функцию цепи

$$H(\theta) = (1 / (2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega\theta} d\omega. \quad (4.13)$$

Передаточная функция для изучаемой цепи: $K(\omega) = \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega)$. Подставим последнее выражение в (4.13), получим $H(\theta) = \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \times \exp(-\alpha\theta) \sin((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \theta)$, где $\theta \geq 0$. Подставляя выражения для $B_{\text{ш}}(\tau)$ и $H(\theta)$ в (4.12), получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \sigma_{\text{уст}}^2 (1 - \alpha / (\omega_0^2 - \alpha^2) C(t) \exp(-2\alpha t)), \quad (4.14)$$

где $\sigma_{уст}^2$ - установившееся значение дисперсии, которое соответствует выражению (4.6), $\sigma_{уст}^2 = \omega_0^2 / (4\alpha)$, $\sigma_{вых}^2(t) \rightarrow \sigma_{уст}^2$ при $t \rightarrow \infty$, $C(t) = (2\alpha \sin^2((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} t) + (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \sin(2(\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} t) + (\omega_0^2 - \alpha^2) / \alpha)$.

Для контура со слабым затуханием $\alpha^2 \ll \omega_0^2$, тогда (4.14) приближенно упрощается: $\sigma_{вых}^2(t) \approx \sigma_{уст}^2(1 - \exp(-2\alpha t))$. Отсюда следует, что характерное время установления стационарной мощности шума в колебательном контуре $\sim 1/\alpha$, то есть порядка характерного времени затухания свободных колебаний в контуре.

4.4. Распределение вероятностей на выходе системы

Пусть при заданном распределении вероятностей случайного процесса на входе линейной системы требуется определить распределение вероятностей на выходе системы. Наиболее просто эта задача решается, если на входе действует гауссовский случайный процесс $\eta(t)$ со средним $\langle \eta \rangle$: $\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle + \eta_{ш}(t)$, где $\eta_{ш}(t)$ - гауссовский шум с функцией распределения: $w_{ш}(\eta_{ш}, t) = 1/(2\pi \sigma_{ш}^2)^{1/2} \times \exp(-\eta_{ш}^2 / (2\sigma_{ш}^2))$. Прохождение детерминированного процесса $\langle \eta(t) \rangle$ через линейную систему даст на выходе детерминированный процесс $\langle x(t) \rangle$. Основываясь на центральной предельной теореме (ЦПТ) теории вероятностей [2, 3], представим гауссовский шум $\eta_{ш}(t)$ суперпозицией большого числа N статистически независимых друг от друга случайных процессов с произвольными функциями распределения. В соответствии с принципом суперпозиции прохождение каждой из составляющих сигнала $\eta(t)$ через линейную систему можно исследовать независимо от остальных. Шум $\eta_{ш}(t)$ на входе системы создаст шум $x_{ш}(t)$ на выходе, состоящий из большого числа N случайных процессов, статистически независимых друг от друга. Согласно ЦПТ, их суперпозиция есть гауссовский шум на выходе системы. Вывод - если на входе линейной системы действует гауссовский случайный процесс $\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle + \eta_{ш}(t)$, то на ее выходе случайный процесс $x(t) = \langle x(t) \rangle + x_{ш}(t)$ также будет гауссовским.

Интеграл наложения (4.2) можно обобщить на случай линейной системы с переменными параметрами [6] посредством замены $H(t - \theta) \rightarrow H(t, \theta)$ в (4.2). При этом надо учесть, что импульсная характеристика системы в общем случае зависит от двух аргументов t и θ , и лишь для систем с постоянными параметрами $H(t, \theta) = H(t - \theta)$. Проводя искомую замену в (4.2) и усредняя полученное равенство, найдем среднее значение процесса на выходе системы

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta \rangle H(t, \theta) d\theta. \quad (4.15)$$

Действие же шума $\eta_{\text{ш}}(t)$ на входе создаст шум на выходе

$$x_{\text{ш}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\text{ш}}(\theta) H(t, \theta) d\theta. \quad (4.16)$$

Используя (4.16), найдем корреляционную функцию флуктуаций, вообще говоря, нестационарного процесса на выходе

$$B_{\text{вых}}(t, t + \tau) = \langle x_{\text{ш}}(x_{\text{ш}})_{\tau} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{вх}}(\theta, \theta') H(t, \theta) H(t + \tau, \theta') d\theta d\theta', \quad (4.17)$$

где $B_{\text{вх}}(\theta, \theta')$ - корреляционная функция случайного процесса $\eta(t)$ на входе, $B_{\text{вх}}(\theta, \theta') = \langle \eta_{\text{ш}}(\theta) \eta_{\text{ш}}(\theta') \rangle$; дисперсия шума на выходе: $\sigma_{\text{вых}}^2 = \langle x_{\text{ш}}^2 \rangle$.

Среднее $\langle x \rangle$ и дисперсия $\sigma_{\text{вых}}^2$ полностью определяют функцию распределения гауссовского процесса на выходе системы: $w(x, t) = 1 / (2 \pi \sigma_{\text{вых}}^2)^{1/2} \times \exp(-(x - \langle x \rangle)^2 / (2 \sigma_{\text{вых}}^2))$.

Теперь рассмотрим случай, когда входной шум не является гауссовским. Формулы (4.15) - (4.17) остаются справедливыми и в этом случае. Однако знания лишь среднего и дисперсии недостаточно для определения функции распределения любого негауссовского процесса. Во многих практически важных случаях статистика шума на выходе линейной системы оказывается близка к гауссовскому шуму. Это явление называют *эффектом нормализации шумовых колебаний* на выходе линейной системы. Обоснуем существование данного эффекта в линейной системе с постоянными параметрами при выполнении следующих условий: 1) спектр входного шума намного шире резонансной кривой системы ($\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}} \gg \Delta\omega_{\text{рез}}$); 2) если шум нестационарный (переходной процесс), то дополнительно к 1) ставится еще одно условие - $\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}} \gg 1/t$, где t - полное время действия внешнего шума на систему.

Обозначим $\tau_{\text{рез}}$ - характерное время затухания свободных колебаний на выходе системы, описывающих переходной процесс, $\tau_{\text{рез}} \sim 1 / \Delta\omega_{\text{рез}}$. Тогда значениями импульсной характеристики при $\theta > \tau_{\text{рез}}$ ($\theta = 0$ - момент начала переходного процесса) можно пренебречь. Вместо (4.2) получим приближенно

$$x(t) \approx \int_0^t H(\theta) \eta(t - \theta) d\theta. \quad (4.18)$$

Введя время корреляции входного шума $\tau_k \sim 1 / \Delta\omega_{ш}^{вх}$, условие 1) можно переписать: $\tau_k \ll 1 / \Delta\omega_{рез}$. Будем считать, что последнее неравенство выполняется с запасом, и выберем интервал времени τ такой, что $\tau_k \ll \tau \ll \tau_{рел}$. Представим интеграл (4.18) приближенно в виде суммы N членов ($N \approx \tau_{рел} / \tau \gg 1$)

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^N x_n(t), \quad (4.19)$$

$$x_n(t) = \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} H(\theta) \eta(t - \theta) d\theta \approx H(n\tau) \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \eta(t - \theta) d\theta. \quad (4.20)$$

Условие 1) позволяет рассматривать приближенно входной шум как белый с корреляционной функцией $B_{\eta}(\theta - \theta') = \langle \eta(t - \theta) \eta(t - \theta') \rangle = 2\pi G_0 \delta(\theta - \theta')$. Оценим корреляцию между отдельными членами ряда (4.19). Для этого запишем выражение для корреляционной функции $B_{nm} = \langle x_n x_m \rangle$ и выразим x_n и x_m с помощью (4.20). В результате преобразований получим $B_{nm} = 0$ при $n \neq m$. То есть члены ряда (4.19) статистически независимы друг от друга, и, согласно (4.19), случайный процесс на выходе - суперпозиция большого числа независимых составляющих. В соответствии с ЦПТ можем считать приближенно, что процесс на выходе системы является гауссовским независимо от статистики шума на входе.

4.5. Тепловые шумы

Тепловое движение свободных электронов в проводнике приводит к флуктуациям потоков электронов и вызывает случайный электрический ток $i_T(t)$, который называют *тепловым*. Флуктуации электронной плотности, связанные с тепловыми токами, приводят к появлению случайной разности потенциалов на концах проводника. То есть любой двухполюсник, содержащий активное сопротивление, можно рассматривать как генератор случайной э.д.с. $\varepsilon_T(t)$. Тепловые шумы создают неустранимые флуктуационные помехи в любой радиосистеме. Применим термодинамический подход для выяснения спектральных свойств тепловых шумов. На рис. 4.4 показана цепь из двух двухполюсников с импедансами $z_{1,2}(\omega) = R_{1,2}(\omega) + j X_{1,2}(\omega)$, помещенная в термостат при температуре T .

Эквивалентная схема каждого из двух двухполюсников состоит из сопротивления и тепловой э.д.с. Пусть $i_T^{(k)}$ - сила теплового тока, вызванного в цепи тепловой э.д.с. $\varepsilon_T^{(k)}$, где $k = 1, 2$. Полная сила шумового тока: $i_T = i_T^{(1)} + i_T^{(2)}$. Обозна-

чим мощность, отдаваемую источником $\varepsilon_T^{(1)}$ ($\varepsilon_T^{(2)}$) в двухполюсник z_2 (z_1), как $P_{1,2}$ ($P_{2,1}$).

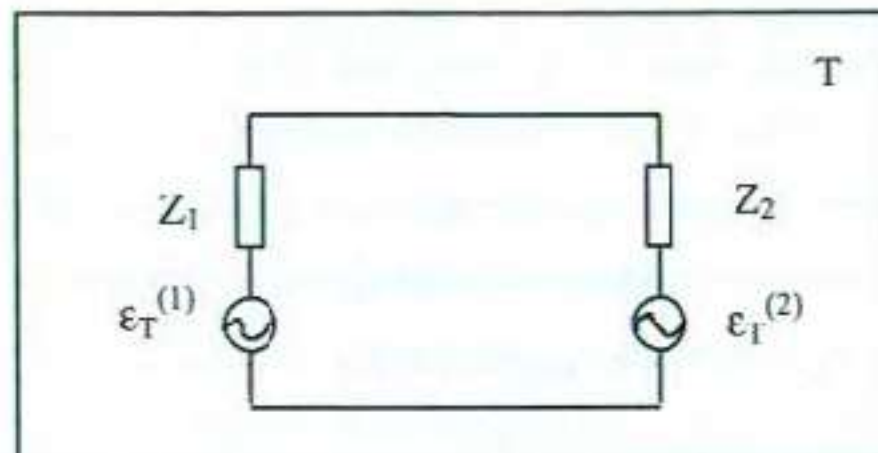


Рис. 4.4

Согласно второму началу термодинамики, теплообмен между отдельными частями равновесной изолированной системы не может нарушить теплового равновесия системы. Поэтому

$$P_{1,2} = P_{2,1}. \quad (4.21)$$

Пусть $G_T^{(k)}(\omega)$ - спектральная плотность мощности флуктуаций э.д.с. $\varepsilon_T^{(k)}$, где $k = 1, 2$. Полный импеданс цепи равен $z = z_1 + z_2$. Спектральная плотность мощности флуктуаций силы тока $i_T^{(k)}$ равна $G_T^{(k)}(\omega) / (zz^*)$, где $k = 1, 2$, и знак «*» обозначает комплексное сопряжение. Тогда

$$P_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_2 G_T^{(1)}(\omega) / (zz^*) d\omega, \quad (4.22)$$

$$P_{2,1} = \int_{-\infty}^{\infty} R_1 G_T^{(2)}(\omega) / (zz^*) d\omega. \quad (4.23)$$

Подставляя (4.22) и (4.23) в (4.21), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_2 G_T^{(1)}(\omega) / (zz^*) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R_1 G_T^{(2)}(\omega) / (zz^*) d\omega. \quad (4.24)$$

Пусть, например, $R_2 = 0$ и $R_1 > 0$. Тогда из (4.24) следует: $G_T^{(2)}(\omega) = 0$. То есть, если двухполюсник не содержит активного сопротивления, то спектральная плотность э.д.с. теплового шума на нем равна нулю. Пусть между двухполюсниками z_1 и z_2 включен дополнительно произвольный пассивный двухполюсник: $z_3 = jX_3$. Повторяя выкладки, вместо (4.24) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_2 G_T^{(1)}(\omega) / (z' z'^*) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R_1 G_T^{(2)}(\omega) / (z' z'^*) d\omega, \quad (4.25)$$

где z' - полный импеданс цепи, $z' = z_1 + z_2 + z_3$.

Так как выбор сопротивления z_3 произволен, то из (4.25) следует: $R_2 G_T^{(1)}(\omega) / |z'|^2 = R_1 G_T^{(2)}(\omega) / |z'|^2$. Отсюда следует, что отношение спектральной плотности теплового шума к активной части любого сопротивления, в котором он генерируется, является универсальной функцией T и ω :

$$G_T(\omega) = R(\omega) u(\omega, T) = \operatorname{Re} \{z(\omega)\} u(\omega, T). \quad (4.26)$$

Так как функция $u(\omega, T)$ универсальна, то результат ее расчета не зависит от конкретного выбора системы. В классической области (при $kT \gg h\nu$, где h - постоянная Планка; k - постоянная Больцмана, и частота: $\nu = \omega/(2\pi)$) справедлива теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы. Тогда средняя энергия тепловых флуктуаций в системе с N колебательными степенями свободы равна

$$\langle w \rangle = N k T. \quad (4.27)$$

В качестве пробной системы рассмотрим высокочастотный колебательный контур (см. рис. 4.3), настроенный на резонансную частоту $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$. Под э.д.с. $e(t)$ контура понимается тепловая э.д.с. $\varepsilon_T(t)$. Полоса пропускания контура $\Delta\omega = 2\alpha = R/L$ предполагается много уже эффективной ширины спектра флуктуаций $G_T(\omega)$ тепловой э.д.с. Тогда входной шум можно аппроксимировать как белый $G_{вх}(\omega) = G_T(\omega_0)$. Передаточная функция изучаемой цепи (см. задачу п. 4.3): $K(\omega) = \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega)$. Подставим приведенные выражения для $G_T(\omega)$ и $K(\omega)$ в (4.6). Найдем дисперсию флуктуаций напряжения на емкости контура $\langle u_{вх}^2(t) \rangle = \pi G_T(\omega_0) \omega_0^2 / (2\alpha)$. Средняя энергия шумового электрического поля конденсатора $\langle w_E \rangle = C \langle u_{вх}^2(t) \rangle / 2$ равна средней энергии шумового магнитного поля катушки индуктивности в контуре. Сумма этих энергий есть полная средняя энергия шумовых колебаний контура. Та же полная энергия может быть выражена из (4.27) при $N = 1$ (колебательный контур обладает одной колебательной степенью свободы). Таким образом, имеем $\pi C G_T(\omega_0) \omega_0^2 / (2\alpha) = k T$, то есть $G_T(\omega_0) = kTR/\pi$. Последнее выражение подставим в (4.26), взятое при $\omega = \omega_0$, и выразим отсюда универсальную функцию

$$u(\omega_0, T) = u(T) = (1/\pi) k T. \quad (4.28)$$

Из (4.28) следует, что искомая универсальная функция не зависит от частоты ω .

Подставляя (4.28) в (4.26), получаем формулу Найквиста для спектральной плотности мощности теплового шума произвольного двухполюсника

$$G_T(\omega) = (k T / \pi) \operatorname{Re} \{z(\omega)\}. \quad (4.29)$$

Из (4.29) следует, что $G_T(\omega) \sim T$ и что зависимость $G_T(\omega)$ от частоты ω полностью определяется зависимостью активной части сопротивления двухполюсника от частоты. Формула Найквиста справедлива в квазиклассическом приближении: $kT \gg \hbar \nu$ ($\nu = \omega / (2\pi)$). При комнатной температуре $T = 300$ К равенство $kT = \hbar \nu$ имеет место приближенно на частоте $\nu \sim 10^{13}$ Гц. То есть классическое приближение при комнатной температуре справедливо для всего радиодиапазона частот. В частности, идеальное омическое сопротивление R не зависит от частоты. Поэтому тепловой шум, генерируемый омическим сопротивлением в радиодиапазоне, можно считать белым. Приближение δ -коррелированности процесса хорошо выполняется практически для всех задач, связанных с изучением воздействия теплового шума на реальные радиотехнические системы.

Задача. Модель реального омического сопротивления состоит из параллельно соединенных идеального сопротивления R и паразитной шунтирующей емкости C_n . Для заданной схемы, находящейся при температуре T , найти спектр мощности теплового шума $G_T(\omega)$ и время корреляции τ_k шума.

Решение. Для изучаемой схемы имеем $\operatorname{Re} \{z(\omega)\} = R / (1 + (\omega C_n R)^2)$. С учетом (4.29) найдем

$$G_T(\omega) = (kT / \pi) R / (1 + (\omega C_n R)^2). \quad (4.30)$$

Из (1.24) и (1.25) следует

$$\tau_k = (4\pi / \sigma_T^4) \int_0^\infty G_T^2(\omega) d\omega, \quad (4.31)$$

где, согласно (1.20), дисперсия теплового шума

$$\sigma_T^2 = \int_0^\infty G_T(\omega) d\omega. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.30) в (4.31) и (4.32), найдем: $\tau_k = C_n R$, где $\tau_k \leq (10^{-9} - 10^{-8})$ с.

В оптическом диапазоне $\omega > 10^{14}$ Гц, и классическое приближение уже не действует. В этом диапазоне тепловой шум превращается в тепловое электро-

магнитное излучение, и вместо (4.29) справедливо распределение Планка для излучательной способности абсолютно черного тела.

4.6. Выделение сигнала из шума

В реальных условиях прием сигнала, содержащего передаваемую информацию, всегда происходит на фоне шума. Шум может как приходить вместе с сигналом, так и генерироваться самой приемной станцией. Пусть I - мощность полезного сигнала, а σ^2 - дисперсия фонового шума. Отношение сигнал/шум равно $c/\pi = I/\sigma^2$. Прием сигнала становится статистической задачей, если c/π меньше или порядка единицы. В статистической теории приема сигналов выделяют две группы задач: 1) обнаружение сигнала на фоне шума; 2) выделение сигнала из шума. В первом случае требуется лишь с максимальной надежностью вынести статистическое решение о наличии или отсутствии сигнала. Сама структура сигнала не изучается. Во втором случае речь идет о наилучшем в статистическом смысле воспроизведении сигнала, скрытого в шуме. Пусть спектры сигнала и шума различны. Тогда решение обеих задач достигается посредством линейной фильтрации (сигнал и шум пропускают через линейный фильтр).

Решим первую задачу посредством построения *оптимального линейного фильтра*. Пусть на линейную систему действует регулярный сигнал

$$\zeta_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.33)$$

с произвольным спектром $\zeta_0(\omega)$, мгновенной интенсивностью $I_0(t) = \zeta_0^2(t)$ и энергией $Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) \zeta_0^*(\omega) d\omega$ (равенство Парсеваля [6]).

Пусть вместе с сигналом $\zeta_0(t)$ на вход фильтра поступает стационарный шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью мощности $G_0(\omega)$. Оптимальным называется фильтр, на выходе которого отношение c/π наибольшее из всех возможных. Требуется найти передаточную функцию оптимального фильтра $K(\omega)$. С учетом (4.33) выразим сигнал, его мощность и энергию на выходе фильтра

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.34)$$

$$I(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^2, \quad (4.35)$$

$$Q = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) K(\omega) (\zeta_0(\omega) K(\omega))^* d\omega. \quad (4.36)$$

Используя (4.3), находим отношение сигнал/шум на выходе фильтра

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} = I(t) / \sigma_{\text{вых}}^2 = I(t) / \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) K^*(\omega) G_0(\omega) d\omega, \quad (4.37)$$

где $\sigma_{\text{вых}}^2$ - дисперсия шума на выходе фильтра.

Интенсивность сигнала (4.35) оценим сверху с помощью неравенства Коши-Буняковского

$$I(t) \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) \zeta_0^*(\omega) d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) K^*(\omega) d\omega \right). \quad (4.38)$$

Предположим сначала, что шум на входе фильтра белый: $G_0(\omega) = G_0 = \text{const}$. Подставляя (4.38) в (4.37) и учитывая (4.36), найдем

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} \leq (1/G_0) \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) \zeta_0^*(\omega) d\omega = Q_0 / (2\pi G_0). \quad (4.39)$$

Оптимальному фильтру соответствует знак равенства в (4.39) и в (4.38). Равенство достигается в момент времени t_0 , если передаточная функция равна оптимальной

$$K(\omega) = K_{\text{опт}}(\omega) = \alpha \zeta_0^*(\omega) \exp(-j\omega t_0), \quad (4.40)$$

где α и t_0 - произвольные постоянные.

Выражение (4.40) дает передаточную функцию оптимального фильтра, если входной шум белый. В (4.39) равенство достигается только в момент $t = t_0$, который оптимален для вынесения решения о наличии сигнала. Выражение (4.40) также показывает, что характеристика оптимального фильтра близка к спектру входного сигнала. Поэтому оптимальный фильтр называют также фильтром, согласованным с сигналом. Подставляя (4.40) в (4.34), найдем сигнал на выходе оптимального фильтра

$$\zeta(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_0(\omega)|^2 \exp(j\omega(t - t_0)) d\omega, \quad (4.41)$$

который принимает максимальное значение $\zeta_{\max} = \alpha Q_0 / (2\pi)$ в момент $t = t_0$.

Сигнал (4.41) - симметричный относительно момента $t = t_0$ импульс, который по форме может сильно отличаться от сигнала на входе фильтра. Например, если на входе прямоугольный импульс, то на выходе - треугольный.

Теперь предположим, что шум на входе фильтра уже не является белым. Если спектры шума и сигнала на входе не перекрываются или перекрываются слабо, то нет необходимости строить оптимальный фильтр. Как обнаружение, так и выделение сигнала из шума достигается применением полосового фильтра. Сигнал находится в полосе пропускания фильтра, а шум - в полосе задержки. Более сложная ситуация, когда перекрытие сигнала и шума по спектру существенно или даже полное, но спектр шума значительно изменяется в полосе спектра сигнала. Оптимальный фильтр строят путем каскадного соединения двух фильтров. Передаточная функция всего фильтра: $K(\omega) = K_1(\omega) K_2(\omega)$. Первый фильтр выбирают так, чтобы на его выходе шум был белым. Для этого задают

$$K_1(\omega) = C / G_0^{1/2}(\omega) \exp(j \varphi(\omega)), \quad (4.42)$$

где выбор $C = \text{const}$ и $\varphi(\omega)$ произволен.

Чтобы проверить, что на выходе первого фильтра действительно получается белый шум, достаточно подставить (4.42) в (4.5). Характеристику второго фильтра берут равной (4.40).

Перейдем к решению задачи о выделении сигнала из шума. Во многих случаях радиосигнал, например промодулированный человеческой речью, можно рассматривать как стационарный шум $\xi_1(t)$. Предположим, что искажающая сигнал $\xi_1(t)$ помеха $\xi_2(t)$ - тоже стационарный шум. Пусть процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ статистически независимы, $\langle \xi_1 \rangle = \langle \xi_2 \rangle = 0$, корреляционные функции $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ считаются известными. Требуется определить передаточную функцию $K(\omega)$ фильтра, суммарный процесс на выходе которого

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) (\xi_{1\omega} + \xi_{2\omega}) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.43)$$

где спектральные компоненты ($n = 1, 2$)

$$\xi_{n\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_n(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.44)$$

с некоторой задержкой по времени t_0 наилучшим образом воспроизводит бы входной сигнал $\xi_1(t)$.

В качестве критерия наилучшего воспроизведения выберем критерий минимума среднеквадратичного значения $\langle \mu^2 \rangle$ ошибки воспроизведения сигнала

$$\mu(t) = \xi(t + t_0) - \xi_1(t). \quad (4.45)$$

Обозначим импульсную характеристику оптимального фильтра как $H(\theta)$ и найдем уравнение, которому подчиняется эта функция. Используя интеграл наложения, запишем

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) (\xi_1(t - \theta) + \xi_2(t - \theta)) d\theta, \quad (4.46)$$

где функция $\xi_1(t - \theta) + \xi_2(t - \theta)$ - полный процесс на входе фильтра а как функция аргумента $t - \theta$. Подставим (4.46) в (4.45) и выразим $\langle \mu^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mu^2(t) \rangle = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta d\theta' - \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) B_1(\theta - t_0) d\theta + B_1(0), \end{aligned} \quad (4.47)$$

где корреляционные функции: $B_1(\tau) = \langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle$ и $B_2(\tau) = \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle$.

Выражение (4.47) рассмотрим как функционал от функции H . Найдем вариацию этого функционала по H :

$$\delta \langle \mu^2 \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta H(\theta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta' - B_1(\theta - t_0) \right\} d\theta. \quad (4.48)$$

Минимум функционала достигается при равенстве нулю его вариации

$$\delta \langle \mu^2 \rangle = 0. \quad (4.49)$$

Уравнения (4.48) и (4.49) совместны, если функция $H(\theta)$ удовлетворяет

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) [B_1(\tau - \theta) + B_2(\tau - \theta)] d\theta = B_1(\tau - t_0). \quad (4.50)$$

Уравнение (4.50) называется *уравнением Винера - Хопфа*, и его решением является импульсная характеристика $H(\theta)$ оптимального фильтра. Используя преобразование Винера - Хинчина (1.22), выразим ($n = 1, 2$)

$$B_n(\tau - \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\omega) \exp(j \omega (\tau - \theta)) d\omega, \quad (4.51)$$

где G_n - спектральная плотность мощности процесса $\xi_n(t)$; аналогично выразим

$$B_n(\tau - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\omega) \exp(j\omega(\tau - t_0)) d\omega. \quad (4.52)$$

Известно [6], что передаточная функция выражается через импульсную характеристику линейной системы преобразованием Фурье

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta. \quad (4.53)$$

Подставим (4.51) и (4.52) в (4.50) и учтем (4.53), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K(\omega)(G_1(\omega) + G_2(\omega)) \exp(j\omega\tau) - G_1(\omega) \exp(j\omega(\tau - t_0))] d\omega = 0. \quad (4.54)$$

Интеграл (4.54) равен нулю независимо от выбора параметров τ и t_0 . Поэтому тождественно равно нулю подинтегральное выражение в (4.54). Тогда передаточная функция фильтра, оптимального для выделения сигнала из шума,

$$K(\omega) = G_1(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega)) \exp(-j\omega t_0). \quad (4.55)$$

Применяя к (4.55) преобразование Фурье, обратное к (4.53), найдем решение уравнения Винера - Хопфа (4.50)

$$H(t_0 + \tau) = (1/\pi) \int_0^{\infty} G_1(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega)) \cos \omega\tau d\omega. \quad (4.56)$$

Импульсная характеристика (4.56) симметрична относительно момента $t = t_0$, так что $H(t_0 + \tau) = H(t_0 - \tau)$. Поскольку δ -импульс поступает на вход фильтра при $t_0 + \tau = 0$, то отклик системы появляется лишь при $t_0 + \tau > 0$. Фильтр с характеристикой (4.56) физически не осуществим, так как в большинстве случаев оказывается $H(t_0 + \tau) > 0$ при $t_0 + \tau < 0$. Физически же отклик системы при $t_0 + \tau < 0$ должен быть равен нулю. В связи с этим требуется выполнить условие отсечки - заменить функцию (4.56) на импульс длительностью $2t_0$:

$$H'(t_0 + \tau) = \begin{cases} H(t_0 + \tau) & \text{при } |\tau| \leq t_0 \\ 0 & \text{при } |\tau| > t_0. \end{cases} \quad (4.57)$$

При увеличении времени задержки t_0 функция H' приближается к функции H . Из (4.47) применительно к оптимальному фильтру можно получить оценку для среднеквадратической погрешности воспроизведения сигнала [5]

$$\langle \mu^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) G_2(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega)) d\omega \leq \min_{k=1,2} \sigma_k^2, \quad (4.58)$$

где σ_k^2 - дисперсия k -ого из двух процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ на входе фильтра,

$$\sigma_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_k(\omega) d\omega. \quad (4.59)$$

Таким образом, минимальная ошибка воспроизведения (4.59) не зависит от времени запаздывания t_0 и от того, какой из двух шумов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ считается сигналом, а какой - помехой. Интенсивности (дисперсии) сигнала, шума и отношение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра в соответствии с (4.5) и (4.59) описываются выражениями

$$\sigma_c^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.60)$$

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.61)$$

$$(с / ш)_{\text{вых}} = \sigma_c^2 / \sigma_n^2, \quad (4.62)$$

где, согласно (4.55), $|K(\omega)|^2 = G_1(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega))^2$; на входе же фильтра

$$(с / ш)_{\text{вх}} = \sigma_c^2 / \sigma_n^2. \quad (4.63)$$

Обсудим два характерных режима фильтрации. В первом из них отношение $(с / ш)_{\text{вх}}$ имеет произвольную величину, но спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ не перекрываются или перекрываются слабо. Тогда $|K(\omega)|^2 \approx 1$ в основной части полосы спектра сигнала $G_1(\omega)$ и $|K(\omega)|^2 \approx 0$ вне этой полосы. Таким образом, $\sigma_c^2 \approx \sigma_1^2$, $\sigma_n^2 \approx 0$ и $(с / ш)_{\text{вых}} \gg 1$. В данном режиме оптимальный фильтр работает наиболее эффективно, практически не искажая сигнала и обеспечивая почти полное подавление помехи. Во втором режиме спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ сильно перекрываются. Рассмотрим два характерных случая: а) $G_1 \ll G_2$ - слабый сигнал на входе фильтра: $(с / ш)_{\text{вх}} \approx G_1 / G_2 \approx (с / ш)_{\text{вых}} \ll 1$; б) $G_1 \gg G_2$ - сильный сигнал на

входе фильтра: $|K(\omega)|^2 \approx 1$ и $(с / ш)_{вх} \approx (с / ш)_{вых} \gg 1$. В исследуемом режиме в обоих случаях линейный фильтр бесполезен, так как не может повлиять существенно на отношение сигнал/шум. В случае б) фильтрация, может быть, и не нужна. Чтобы исправить положение в случае а), можно закодировать входной сигнал и промодулировать его по известному закону.

5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАДИОСИСТЕМАХ

5.1. Нелинейное преобразование сигналов

Примеры нелинейных преобразований колебаний в радиофизике - детектирование, смещение, умножение частоты. Закономерности преобразования случайных процессов в нелинейных системах принципиально отличаются от таковых в линейных системах. Основная причина - нарушение принципа суперпозиции в нелинейных системах. Нелинейные преобразования компонент спектра входного сигнала обусловлены взаимодействием и самовоздействием этих компонент. При нелинейных преобразованиях в спектре сигнала возникают новые компоненты. Например, гауссовские флуктуационные силы, действующие на нелинейную систему, возбуждают в ней колебания, статистика которых может сильно отличаться от гауссовской. Представим нелинейный преобразователь (НЛ) четырехполюсником. Случайный процесс $y(t)$ на выходе его выражается через входной $x(t)$ посредством нелинейного дифференциального уравнения

$$\sum_{n=0}^N a_n(x, y, t) \frac{d^n y}{dt^n} = f(x, y, t), \quad (5.1)$$

где a_n ($n = 1, 2, \dots, N$) и f - случайные функции, зависящие от выбора системы.

В общем случае нелинейное преобразование обладает свойством *инерционности*. Инерционность означает, что в каждой реализации случайного процесса на выходе $y(t)$ значение $y(t_k)$ в произвольный момент времени t_k зависит не только от значения $x(t_k)$ в тот же момент времени, но и от значений $x(t)$ при $t < t_k$. Когда инерционностью можно пренебречь, решение (5.1) можно записать как

$$y = F(x), \quad (5.2)$$

где каждое значение y зависит только от значения x в тот же момент времени.

Функция F - нелинейная характеристика безинерционного преобразователя. Часто нелинейные устройства нельзя считать безинерционными, но их можно представить последовательным соединением безинерционного нелинейного элемента НЛ и линейного инерционного элемента - фильтра Φ (см. рис. 5.1).

Анализ прохождения сигнала через систему упрощается, если пренебречь взаимным влиянием элементов НЛ и Φ на их характеристики. Тогда сначала изу-

чается нелинейное преобразование $x \rightarrow y$, а затем - линейное преобразование $y \rightarrow z$. Начнем с первого этапа. Пусть функция распределения $w_1(x)$ случайного процесса $x(t)$ задана.

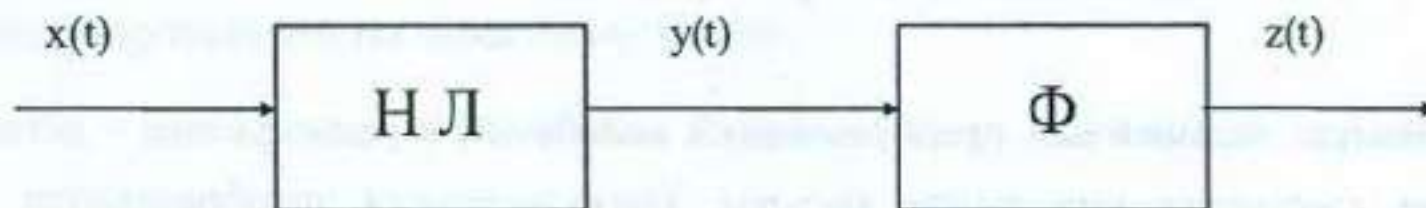


Рис. 5.1

Найдем функцию распределения $w_2(y)$ процесса на выходе элемента НЛ. Если элемент НЛ обладает детерминированной характеристикой F , то вероятность $dP = w_1(x) |dx| = w_2(y) |dy|$, где, согласно (5.2), $|dx| = |d\phi/dy| |dy|$ и $\phi(y)$ - функция, обратная к функции F из (5.2). Отсюда имеем

$$w_2(y) = w_1(x = \phi(y)) |d\phi / dy|. \quad (5.3)$$

Конкретизируем зависимость (5.2) как степенную: $y = x^n$ ($n = 2, 3, \dots$). Вместо (5.3) получим $w_2(y) = w_1(x = y^{1/n}) |y^{1/n-1}| / n$. В частности, гауссовское распределение на входе $w_1(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2 / (2\sigma^2))$ переходит в существенно негауссовское $w_2(y) = |y|^{1/n-1} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} (1/n) \exp(-y^{2/n} / (2\sigma^2))$ на выходе. Одно из часто встречающихся нелинейных преобразований - *умножение частоты (генерация гармоник)*. Пусть на вход элемента НЛ со степенной характеристикой подано колебание со случайной амплитудно-фазовой модуляцией

$$x = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) = A(t) \exp(j\omega_0 t) + \text{к. с.}, \quad A = (\rho/2) \exp(j\theta), \quad (5.4)$$

где случайные функции $\rho(t)$ и $\theta(t)$ статистически независимы друг от друга.

Подставим (5.4) в выражение для характеристики элемента НЛ: $y = x^n$. Используя формулу бинома Ньютона, получим

$$y = (\rho(t)/2)^n \sum_{p=0}^n C_n^p \exp[j(n-2p)(\omega_0 t + \theta(t))], \quad (5.5)$$

где C_n^p - число сочетаний, $C_n^p = n! / ((n-p)! p!)$.

Из (5.5) видно, что с помощью нелинейности четной степени n можно генерировать только четные гармоники с частотами: $0, 2\omega_0, 4\omega_0, \dots$, а с помощью нелинейности нечетной степени - только нечетные: $3\omega_0, 5\omega_0, \dots$. Переходя от пере-

менной p к переменной $m = n - 2p$, вместо (5.5) найдем интегральный спектр мощности процесса на выходе элемента НЛ

$$y = \sum_{m=0}^n z_m(t), \quad (5.6)$$

где m -ая гармоника процесса на выходе $z_m(t) = C_n^{(n-m)/2} (\rho(t)/2)^n (2 - \delta_{0m}) \times \cos [m(\omega_0 t + \theta(t))]$, и $\delta_{0m} = 1$ при $m = 0$ и $\delta_{0m} = 0$ при $m = 1, 2, \dots, n$.

Дисперсия m -ой гармоники на выходе нелинейного элемента

$$\sigma_m^2 = \langle z_m^2 \rangle = 2^{1-2n} \langle \rho^{2n} \rangle F_{mn}, \quad (5.7)$$

где

$$F_{mn} = (C_n^{(n-m)/2})^2 (1 - \delta_{0m}/2). \quad (5.8)$$

Зависимость σ_m^2 от номера гармоники m определяет форму спектра (5.6). Последняя зависит от фактора F_{mn} и не зависит от статистических свойств входного сигнала $x(t)$. Из (5.8) следует, что при заданной степени нелинейности n относительная эффективность генерации m -ой гармоники, пропорциональная F_{mn} , уменьшается с ростом m . Введем к.п.д. генерации m -ой гармоники

$$\text{к.п.д.} = \sigma_m^2 / \sigma_{\text{вх}}^2, \quad (5.9)$$

где, согласно (5.4), дисперсия процесса на входе: $\sigma_{\text{вх}}^2 = \langle x^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle / 2$.

При заданных m и n имеем: к.п.д. $\sim \langle \rho^{2n} \rangle / \langle \rho^2 \rangle$, то есть к.п.д. зависит от статистики огибающей $\rho(t)$ входного сигнала (5.4). Изучим частный случай - амплитудная модуляция в (5.4) отсутствует: $\rho(t) = \rho_0 = \text{const}$. Тогда функция распределения огибающей $w_\rho = \delta(\rho - \rho_0)$, и из (5.9) получим: $(\text{к.п.д.})_1 \sim \rho_0^{2n-2} = \sigma_{\text{вх}}^{2n-2} 2^{n-1}$, где $\sigma_{\text{вх}}^2 = \rho_0^2 / 2$. Пусть теперь амплитудная модуляция входного сигнала есть, и огибающая $\rho(t)$ распределена по экспоненциальному закону: $w_\rho = (1/\sigma) \exp(-\rho/\sigma)$. Найдем дисперсию процесса на входе: $\sigma_{\text{вх}}^2 = \langle \rho^2 \rangle / 2 = \sigma^2$, и далее, используя (5.9), - $(\text{к.п.д.})_2 \sim \sigma^{2n-2} (2n)! / 2$. Пусть $\sigma_{\text{вх}}^2$ одинакова в обоих изучаемых случаях. В результате имеем: $(\text{к.п.д.})_2 / (\text{к.п.д.})_1 = (2n)! / 2^n > 1$. То есть при переходе от δ -распределения к более широкому - экспоненциальному, достигается статистический выигрыш в к.п.д. генерации каждой гармоники. Статистический выигрыш тем больше, чем медленнее спадает распределение $w_\rho(\rho)$ при удалении ρ от $\langle \rho \rangle$.

Пусть процесс (5.4) на входе узкополосный (квазигармонический). Тогда отдельные гармоники z_m в разложении (5.6) - узкополосные процессы. Пусть эффективная ширина спектра шума каждой гармоники $\Delta\omega_m < \omega_0$, где ω_0 равно расстоянию между соседними гармониками. Для выделения m -ой гармоники доста-

точно после нелинейного преобразователя поставить линейный фильтр. Последний должен быть настроен на частоту m -ой гармоники $m\omega_0$ и иметь полосу пропускания $\Delta\omega_\Phi$, удовлетворяющую условию $\Delta\omega_{ш} < \Delta\omega_\Phi < \omega_0$.

5.2. Амплитудное детектирование шума

Идеальным квадратичным детектором называют устройство с нелинейной характеристикой $y = \alpha x^2$. Схеме реального детектора соответствует изображенная на рис. 5.1, где искомая характеристика приписывается элементу НЛ. Пусть $K_\Phi(\omega)$ - характеристика фильтра Φ той же схемы. Пусть входной процесс описывается выражением (5.4). На выходе элемента НЛ, согласно (5.5), генерируются нулевая и вторая гармоники входного колебания: $y(t) = y_0(t) + y_2(t)$, где $y_0(t) = (\alpha/2) \rho^2(t)$ и $y_2(t) = (\alpha/2) \rho^2(t) \cos(2\omega_0 t + 2\theta(t))$. Пусть $\Delta\omega$ - эффективная ширина спектра процесса $x(t)$, а $\Delta\omega_\Phi$ - эффективная ширина полосы пропускания фильтра. На выходе линейного фильтра Φ получим сигнал, пропорциональный мгновенной интенсивности входного сигнала $x(t)$: $z \sim y_0(t) \sim \rho^2(t) \sim I(t)$, если $\Delta\omega \ll \Delta\omega_\Phi$, или среднему по времени мгновенной интенсивности $z \sim \langle y_0(t) \rangle_T \sim \langle \rho^2(t) \rangle_T \sim \langle I(t) \rangle_T$, если $\Delta\omega \gg \Delta\omega_\Phi$. Задача - рассчитать корреляционную функцию и спектр случайного процесса на выходе детектора. Пусть на вход схемы поступает стационарный гауссовский шум с известной статистикой $\langle x \rangle = 0$, $\langle xx_\tau \rangle =$

$$= B_0(\tau) = \sigma^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \text{ Расчет дает } \langle x^2 x_\tau^2 \rangle = \sigma^4 (1 + 2R_0^2(\tau)).$$

С учетом последнего выражения и квадратичности характеристики элемента НЛ схемы найдем корреляционную функцию процесса $y(t)$:

$$\langle y y_\tau \rangle = \alpha^2 \langle x^2 x_\tau^2 \rangle = \alpha^2 \sigma^4 (1 + 2R_0^2(\tau)). \quad (5.10)$$

К корреляционной функции (5.10) применим преобразование Винера - Хинчина (1.21), учтем связь между коэффициентом корреляции $R_0(\tau)$ и спектром мощности входного шума $G_0(\omega)$, данную выше. В результате найдем выражение для спектра мощности процесса $y(t)$:

$$G(\omega) = \alpha^2 \sigma^4 \delta(\omega) + 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \omega) d\omega_1. \quad (5.11)$$

В (5.11) первое слагаемое дает спектр мощности $G_c(\omega)$ постоянной составляющей $\langle y \rangle$, а второе - спектр мощности $G_{fl}(\omega)$ флуктуаций $y - \langle y \rangle$, причем

$$\langle y \rangle^2 = \alpha^2 \sigma^4 = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(\omega) d\omega, \quad (5.12)$$

$$\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle = 2 \alpha^2 \sigma^4 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\phi n}(\omega) d\omega. \quad (5.13)$$

Пусть входной процесс $x(t)$ узкополосный - спектр $G_0(\omega)$ сосредоточен в узкой полосе частот $\Delta\omega$ около $\omega = \pm \omega_0$. Структура подинтегрального выражения второго слагаемого в (5.11) показывает, что $G_{\phi n}(\omega)$ заметно отличается от нуля лишь при $\omega \approx 0$ и $\omega \approx \pm 2\omega_0$. Поэтому спектр $G_{\phi n}(\omega)$ можно представить суммой спектров низкочастотных и высокочастотных флуктуаций: $G_{\phi n}(\omega) = G_{нч}(\omega) + G_{вч}(\omega)$, где $G_{нч}(\omega) \approx G_{\phi n}(\omega)$ при $\omega \approx 0$ и $G_{вч}(\omega) \approx G_{\phi n}(\omega)$ при $\omega \approx \pm 2\omega_0$. Причем дисперсии низко- и высокочастотных флуктуаций одинаковы: $\sigma_{нч}^2 = \sigma_{вч}^2$. Итак, для гауссовского входного шума на выходе квадратичного детектора НЛ получаем равнораспределение дисперсии по компонентам шума: $\langle y \rangle^2 : \sigma_{нч}^2 : \sigma_{вч}^2 = 1:1:1$. На практике типично соотношение $(\langle y \rangle^2 + \sigma_{нч}^2) : \sigma_{вч}^2 = 2:1$. В схеме детектора на рис. 5.1 в качестве нелинейного элемента НЛ можно использовать диод, а в качестве фильтра Φ - линейный RC - фильтр нижних частот (см. рис. 4.2). Последний обычно присоединяют к диоду без согласующей развязки. Тогда диод шунтирует фильтр, расширяя полосу пропускания фильтра. Коэффициент уширения полосы пропускания фильтра растет вместе с отношением сопротивления фильтра R к внутреннему сопротивлению диода R_i .

5.3. Измерение слабых шумов

Даже при использовании оптимальной линейной фильтрации эффективное выделение слабого случайного сигнала ξ_1 на фоне сильного ξ_2 возможно лишь в том случае, когда спектры сигналов достаточно разнесены по частоте. Если же спектры сигналов $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ перекрываются и $G_1(\omega) \ll G_2(\omega)$, то линейная фильтрация непригодна для выделения сигнала ξ_1 . Эта проблема важна, в частности, при измерении слабых шумовых полей. Устройства, используемые для этой цели, называются *радиометрами*. В данном случае помехой измерению являются внутренние (например, тепловые и дробовые) шумы радиометра. Для измерения ξ_1 на фоне $\xi_2 \gg \xi_1$ в радиометрах используется то обстоятельство, что слабый шум ξ_1 является внешним. Поэтому, периодически отключая приемную антенну, можно модулировать или вообще выключать процесс ξ_1 , не влияя при этом на большой внутренний шум ξ_2 . Основные типы радиометров - это *флук-*

туационный и компенсационный. Схема последнего типа показана на рис. 5.2, где $\Delta\omega_3 \ll \Delta\omega_2 \ll \Delta\omega_1$ - полосы пропускания линейных фильтров Φ_3 , Φ_2 и Φ_1

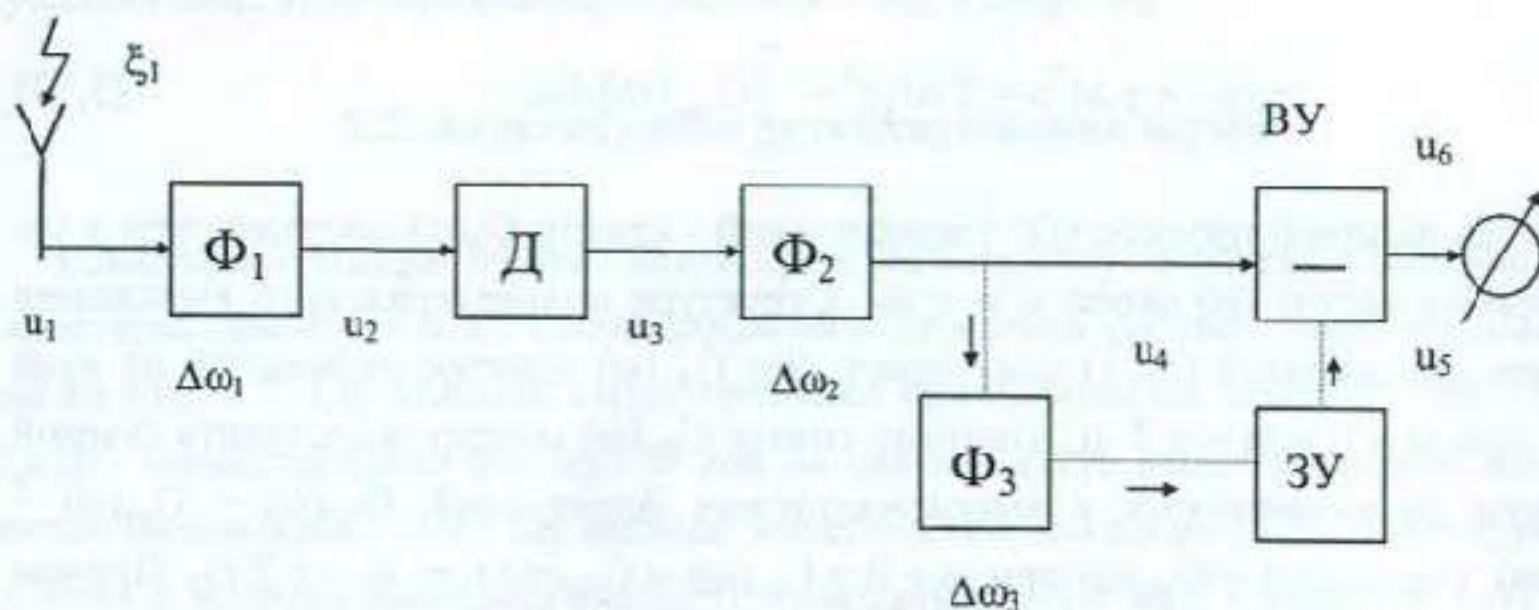


Рис. 5.2

Радиометр можно представить упрощенно как стандартный приемник. Его основными элементами являются антенна, полосовой фильтр Φ_1 , детектор Д, фильтр нижних частот Φ_2 и выходной измерительный прибор. Фильтр Φ_1 заменяет узел реального приемника, состоящий из усилителя высокой частоты (УВЧ), смесителя и усилителя промежуточной частоты (УПЧ). Под полосой $\Delta\omega_1$ пропускания фильтра Φ_1 следует понимать полосу пропускания УПЧ. Слабый шум ξ_1 , подлежащий измерению, улавливается антенной и поступает на вход фильтра Φ_1 , то есть $u_1 = \xi_1$. В фильтре Φ_1 к нему добавляется сильный внутренний шум ξ_2 . Сигнал на выходе фильтра Φ_1 : $u_2 = \xi_1 + \xi_2$. Считая детектор Д квадратичным, выразим сигнал после детектора (на входе измерительного прибора): $u_3 = \alpha (\xi_1 + \xi_2)^2$. Измерительный прибор действует по компенсационному принципу следующим образом. При выключенной антенне ($\xi_1 = 0$) вводится в действие показанная пунктиром цепь, состоящая из фильтра Φ_3 и запоминающего устройства ЗУ. В ЗУ фиксируется постоянная составляющая $\langle u_3 \rangle (\xi_1 = 0) = \alpha \sigma_2^2$, где σ_2^2 - дисперсия внутреннего шума фильтра Φ_1 (сигнала, поступающего из детектора). Затем уже при включенной антенне эта составляющая подается на вычитающее устройство ВУ. То есть при включенной антенне $u_5 = \alpha \sigma_2^2$ и $u_4 = \alpha \times (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, где σ_1^2 - дисперсия шума сигнала ξ_1 . На выходе вычитающего устройства ВУ получим сигнал: $u_6 = u_4 - u_5 = \alpha \sigma_1^2$. Точность измерения интенсивности шума радиометром тем выше, чем больше отношение $\Delta\omega_1 / \Delta\omega_2$.

Недостатки компенсационной схемы обусловлены неизбежными медленными изменениями параметров приемного тракта, например, из-за флуктуаций

внешней температуры. Тогда достаточно точная компенсация может стать невозможной. От этого недостатка свободна модуляционная схема (см. рис. 5.3).

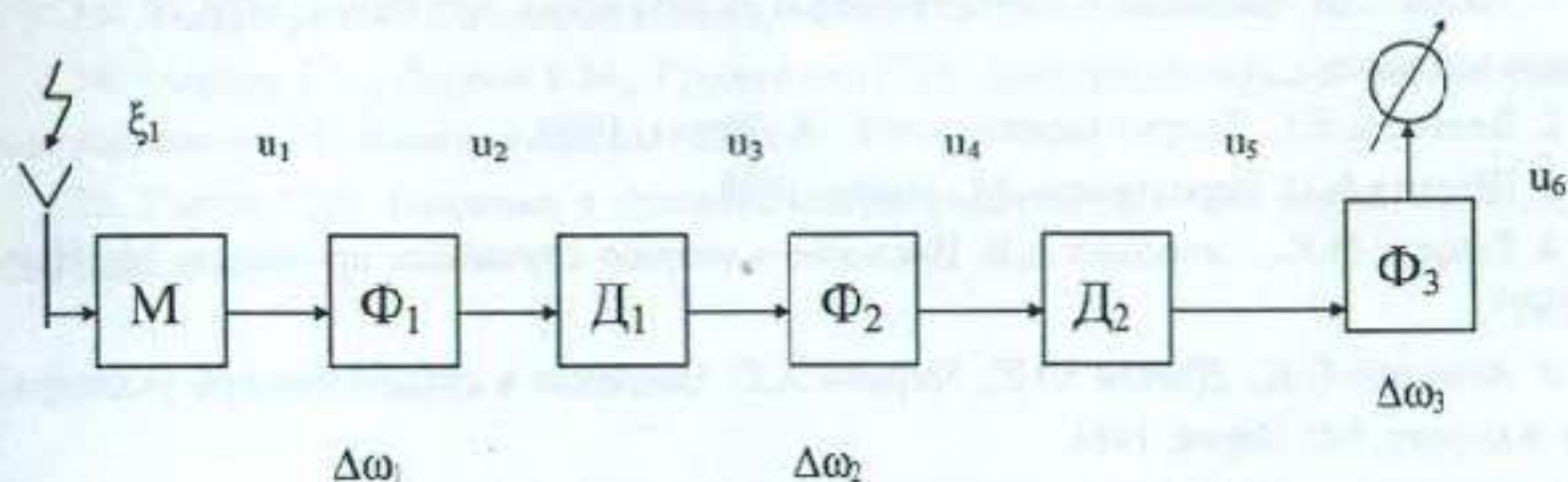


Рис. 5.3. Модуляционная схема радиометра: $\Delta\omega_2 \ll \Omega_0$, $\Delta\omega_1$;

$\Delta\omega_1 < \Delta\omega_3 \ll 2\pi\Omega_0$; $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, T_0 - период модуляции,

$\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$, и $\Delta\omega_3$ - полосы пропускания линейных фильтров Φ_1 , Φ_2 и Φ_3

В схеме рис. 5.3 модулятор производит периодическую модуляцию входного шума ξ_1 : $u_1 = m(t) \xi_1$, где $m(t)$ - периодическая функция модуляции с периодом T_0 . На выходе первого детектора D_1 регулярная составляющая шума ξ_1 возникает не только на нулевой частоте, но и на частотах, кратных частоте модуляции Ω_0 . На этих частотах нет конкурирующих регулярных составляющих, порожденных внутренним шумом ξ_2 . Используя полосовой фильтр Φ_2 , настроенный на частоту одной из гармоник $n\Omega_0$, второй детектор D_2 и фильтр нижних частот Φ_3 , на выходе радиометра можно выделить постоянную составляющую, обусловленную в основном только измеряемым шумом ξ_1 . Влияние флуктуаций параметров схемы подавляется, если ширина их спектра по частоте $\Delta\omega_n \ll \Omega_0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976. Ч. 1. Случайные процессы.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
5. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1971.
7. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
8. Левин Б.В. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
9. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л. Смоллина и Г. Хауса. Л.: Энергия, 1964.
10. Черенкова Е.Л., Чернышев О.В. Распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 1984.
11. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989.
12. Радиотехнические системы передачи информации / Под ред. В.В. Калмыкова. М.: Радио и связь, 1990.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие: В 10 т. Т. 4. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. М.: Наука, 1989.
14. Клышко Д.Н. Фотоны и нелинейная оптика. М.: Наука, 1980.
15. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
16. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974.
17. Горбачев Г.Н., Чаплыгин Е.Е. Промышленная электроника / Под ред. В.А. Лабунцова. М.: Энергоатомиздат, 1988.
18. Тарасенко Ф.П. Введение в курс теории информации. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1963.
19. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. М.: Советское радио, 1979.
20. Лоудон Р. Квантовая теория света / Под ред. Г.В. Скроцкого. М.: Мир, 1976.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973.

22. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970.
23. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.
24. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Советское радио, 1979.
25. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978. Ч. 2. Случайные поля.

**ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО КУРСУ
«СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА»**

1. Обнаружение сигнала на фоне шума.
2. Измерение случайных процессов. ✓
3. Цифровая обработка случайных процессов.
4. Случайный одиночный импульс.
5. Квазипериодические импульсные процессы.
6. Случайные импульсные последовательности.
7. Дробовой шум.
8. Фотоотсчеты в случайном световом поле.
9. Случайные узкополосные процессы. ✓
10. Случайные диффузионные процессы.
11. Колебания, модулированные шумом.
12. Статистика случайных процессов в линейных радиосистемах.
13. Фильтрация шума избирательными системами.
14. Распределение вероятностей на выходе системы.
15. Тепловые шумы.
16. Выделение сигнала из шума.

Методические материалы
по курсу «Статистическая радиофизика»
Конспект лекций

Составители:

Александр Юрьевич Липинский
Анна Николаевна Рудякова

Донецкий национальный университет