

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор



 В.А. Дубровина

«31» марта 2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«ГЕОМЕТРИЯ МАСС»**

---

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	программа магистратуры
Направление подготовки	01.04.01 Математика
Магистерская программа	Математика
Форма обучения	очная

Рабочая программа адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2023

Рабочая программа дисциплины «Геометрия масс» для обучающихся по направлению подготовки 01.04.01 Математика, магистерской программы «Математика», составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для очной формы обучения в 2023 г.

Разработчик:

профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений

д. физ.-мат. наук, доцент

*ВЗас*

В.П. Заставный

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Протокол от 31.03.2023 г. № 10а

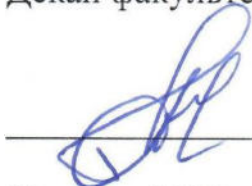
Заведующий кафедрой

*В*

В.В. Волчков

## СОГЛАСОВАНО

Декан факультета математики и информационных технологий



И.А. Моисеенко

31 марта 2023 г.

## СОГЛАСОВАНО

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий (Протокол от 31.03.2023 г. № 3)

Председатель



Л. И. Селякова

31 марта 2023 г.

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Геометрия масс» включена в часть, формируемую участниками образовательных отношений, учебного плана.

Изучение данной дисциплины основывается на базе программы бакалавриата: «Алгебра», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Теоретическая механика». Знания и умения, полученные в ходе изучения дисциплины «Геометрия масс» являются основой для прохождения практик; используются при подготовке выпускной квалификационной работы.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

<i>Наименование показателя</i>	<i>Характеристика дисциплины</i>	
Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика	
Направление подготовки	01.04.01 Математика	
Программа высшего образования	магистратура	
Магистерская программа	Математика	
Дисциплина базовой / вариативной части образовательной программы	Вариативная часть, формируемая участниками образовательных отношений	
	очная форма обучения	заочная форма обучения
Количество зачетных единиц	4	
Общее количество часов	144	
Год подготовки	2	
Семестр	3	
Количество содержательных модулей	1	
Недельное количество часов для очной формы обучения:		
аудиторных	3	
лекционных	1	
практических, семинарских	2	
лабораторных		
самостоятельной работы	5	
индивидуальные задания		
Форма промежуточной аттестации	экзамен	

## 3. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

### Цель дисциплины:

фундаментальная подготовка в области геометрии масс; овладение методами решения основных типов задач по геометрии масс; овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

### Задачи дисциплины:

Показать возможность использования аппарата геометрии масс при решении теоретических и прикладных задач.

#### 4. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

В результате освоения изучения дисциплины у обучающегося должны быть сформированы компетенции:

<i>Универсальные компетенции (УК):</i>	
УК-2	Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла
<i>Общепрофессиональные компетенции (ОПК):</i>	
ОПК-3	Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности
<i>Профессиональные компетенции (ПК):</i>	
ПК-2	Способен осуществлять педагогическую деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования
ПК-3	Способен осуществлять педагогическую деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования в рамках модуля "Предметное обучение. Математика"
ПК-4	Способен осуществлять преподавание по дополнительным общеобразовательным программам

Достижение компетенций оценивается на основе индикаторов и соответствующих им результатов обучения.

**Индикаторы достижения компетенций и результаты обучения.**  
Достижение компетенций оценивается на основе таких индикаторов и соответствующих им результатов обучения

Универсальные компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
УК-2. Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2. И-1. Планирует решение задач в зоне своей ответственности с учетом имеющихся ресурсов и ограничений, действующих правовых норм	Знает источники заданий и информации для их выполнения
		Знает собственные ресурсные ограничения
		Знает правовые ограничения при выполнении заданий
		Умеет планировать реализацию поставленных задач
		Умеет выделять менее существенное с учетом ресурсных ограничений
	УК-2. И-2. Реализует принципы проектного подхода к управлению	Знает этапы жизненного цикла проекта
		Знает подходы к управлению проектом
		Умеет анализировать требования к проекту
		Умеет реализовать проект
		Умеет управлять проектом

Общепрофессиональные компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
----------------------------------	------------	---------------------

ОПК-3. Способен использовать знания в сфере математики при осуществлении педагогической деятельности	ОПК-3. И-1. Знает решение научных задач в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой	Знает базовые понятия и факты геометрии
		Знает формулировки понятий геометрии масс
		Знает формулировки и доказательства теорем геометрии масс
		Умеет применять полученные теоретические знания при решении задач
		Умеет применять геометрию масс к задачам механики

Профессиональные компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	ПК-2. И-1. Способен проводить занятия для обучающихся разного уровня	Знает особенности каждого возрастного периода детей для осуществления обучения, воспитания и развития в образовательных учреждениях общего и дополнительного образования
		Знает методы обучения, воспитания и развития с учетом социальных, возрастных, психофизических и индивидуальных особенностей, в том числе особых образовательных потребностей обучающихся
		Умеет организовать образовательный и воспитательный процессы, учитывая возрастные, социальные и психофизические особенности обучающихся
		Умеет применять различные методы обучения, воспитания и развития с учетом социальных, возрастных, психофизических и индивидуальных особенностей, в том числе особых образовательных потребностей обучающихся
ПК-3. Способен осуществлять педагогическую деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования в рамках модуля "Предметное обучение. Математика"	ПК-3. И-1. Контролирует и оценивает работу обучающихся на учебных занятиях и самостоятельную работу	Знает методику внеурочной работы по математике со школьниками
		Знает научное представление о результатах образования, путях их достижения и способах оценки
		Умеет организовать различные виды внеурочной деятельности
		Умеет строить воспитательную деятельность с учетом индивидуальных особенностей
ПК-4. Способен осуществлять преподавание по дополнительным	ПК-4. И-1. Демонстрирует умение готовить обучающихся к участию в	Знает понятия и методы геометрии, которые не входят в общий курс
		Знает классы задач, решаемых с помощью геометрии масс
		Знает основные теоремы геометрии масс

общеобразовательным программам	конкурсах, конференциях, олимпиадах	Умеет выбрать раздел геометрии для более глубокого его усвоения обучающимися
		Умеет выбрать круг задач для обучающихся, решение которых является основой для участия в конкурсах, конференциях, олимпиадах

## 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Темы	Вопросы темы
<b>Содержательный модуль 1. Геометрия масс</b>	
Центр масс в случае конечной системы материальных точек	<p>1.1. Определение центра масс в случае конечной системы материальных точек. Основные теоремы: теорема о существовании и единственности, теорема о центре масс двух материальных точек, теорема о группировке. Координаты центра масс.</p> <p>1.2. Барицентрические координаты на плоскости.</p> <p>1.3. Барицентрические координаты как площади.</p> <p>1.4. Теоремы Чевы и Менелая.</p> <p>1.5. Момент инерции относительно точки в случае конечной системы материальных точек. Теоремы Якоби и Лагранжа.</p>
Центр масс в общем случае*	<p>2.1 Интеграл и масса.</p> <p>2.2 Определение центра масс в общем случае. Случай нулевой массы.</p> <p>2.3 Теоремы Гюльдена.</p> <p>2.4. Центр масс усеченного конического тела. **</p>
Момент инерции*	<p>3.1 Момент инерции относительно множества в дискретном и в общем случаях.</p> <p>3.2 Момент инерции относительно точки. Теорема Лагранжа в общем случае.</p> <p>3.3 Теорема о моментах инерции относительно параллельных плоских множеств. Теорема Гюйгенса-Штейнера.</p> <p>3.4 Центробежный и сопряженный моменты инерции. Момент инерции относительно прямой. Оператор инерции. **</p>
Поверхность инерции*	<p>3.1 Поверхность инерции. Гиационная поверхность инерции. Случай неотрицательной плотности. Примеры пустых поверхностей инерции. Поверхности инерции, полученные параллельным переносом. Критерий существования точек, в которых поверхность инерции является сферой или пустым множеством. **</p> <p>3.2 Построение поверхности инерции по известной центральной поверхности инерции. Теорема Бине. **</p>

\* — практико-ориентированные темы.

\*\* — вопросы, выносимые на самостоятельное изучение.

## 6. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Названия содержательных модулей и тем	Количество часов							
	Очная форма обучения				Заочная форма обучения			
	Всего	В т.ч.			Всего	В т.ч.		
		Лекции	Практические	Самостоятельная работа		Лекции	Практические	Самостоятельная работа
Содержательный модуль 1. Геометрия масс								
1. Центр масс в случае конечной системы материальных точек	51	6	15	30				
2. Центр масс в общем случае*	41	5	12	24				
3. Момент инерции*	38	5	9	24				
4. Поверхность инерции*	14	2	0	12				
Итого по содержательному модулю 1	144	18	36	90				
Всего часов	144	18	36	90				

## 7. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Самостоятельная работа имеет особенное значение для креативного (творческого) усвоения основных понятий и категорий основы научной работы обучающихся. Самостоятельная работа обучающегося является важной формой учебного процесса, которая позволяет приобрести, а также закрепить новые знания, навыки и умения, сформировать личные убеждения, использовать полученные знания и умения в практической деятельности. Она осуществляется на протяжении всего процесса обучения и имеет следующие стадии:

1. Первичное ознакомление с теоретическим материалом и составление конспекта;
2. Изучение и усвоение теоретического материала;
3. Самостоятельная проработка литературных источников и обобщение изученного материала;
4. Подготовка к практическим (лабораторным) занятиям;
5. Выполнение практических заданий;
6. Индивидуальная работа по заданию преподавателя.

Контрольными формами самостоятельной работы по дисциплине могут быть следующие: работа с литературными первоисточниками по темам дисциплины; выполнение практических заданий, подготовка докладов, тезисов, научных статей.

## 8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### Содержательный модуль 1. Геометрия масс

1. Определение центра масс в случае конечной системы материальных точек. Основные теоремы: теорема о существовании и единственности, теорема о центре масс двух материальных точек, теорема о группировке. Координаты центра масс.
2. Барицентрические координаты на плоскости.
3. Барицентрические координаты как площади.
4. Теоремы Чева и Менелая.
5. Момент инерции относительно точки в случае конечной системы материальных точек. Теоремы Якоби и Лагранжа.
6. Интеграл и масса.
7. Определение центра масс в общем случае. Случай нулевой массы.
8. Теоремы Гюльдена.
9. Центр масс усеченного конического тела.
10. Момент инерции относительно множества в дискретном и в общем случаях.
11. Момент инерции относительно точки. Теорема Лагранжа в общем случае.
12. Теорема о моментах инерции относительно параллельных плоских множеств. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
13. Центробежный и сопряженный моменты инерции. Момент инерции относительно прямой. Оператор инерции.
14. Поверхность инерции. Гиравационная поверхность инерции. Случай неотрицательной плотности. Примеры пустых поверхностей инерции. Поверхности инерции, полученные параллельным переносом. Критерий существования точек, в которых поверхность инерции является сферой или пустым множеством.
15. Построение поверхности инерции по известной центральной поверхности инерции. Теорема Бине.

## 9. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Оценочные средства детализируются по видам работ в оценочных материалах по дисциплине, которые утверждаются на заседании кафедры.

Система оценивания по дисциплине по очной форме обучения\*

Форма контроля	Максимальное количество баллов	
	За одну работу	Всего
Текущий контроль:		
практическая работа (тема 1)	25	75
практическая работа (тема 2)	25	25
Промежуточная аттестация	экзамен	
<b>Итого за семестр</b>	<b>100</b>	

\* в соответствии с утвержденными оценочными материалами по дисциплине

## 10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале согласно таким критериям, приведенным в таблице ниже. Организационно-учебная работа обучающегося в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (вопросы лектору по теме лекционного материала, участие в обсуждении пройденного материала, решение задач и ситуаций у доски и т.п.).

Содержательные Модули	Вид работы	Баллы
Содержательный модуль 1	Организационно-учебная работа студента в	10
	Самостоятельная работа	10
	Модульная контрольная работа	80
	<b>Итого</b>	<b>100</b>
<b>Экзамен</b>		<b>100</b>
<b>Общий итог</b>		<b>100</b>

### Порядок оценивания учебных достижений обучающихся

Оценка по шкале ECTS	Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по пятибалльной шкале	
		экзамен, дифференцированный зачет	зачет
A	90-100	5 (отлично)	зачтено
B	80-89	4 (хорошо)	зачтено
C	75-79	4 (хорошо)	зачтено
D	70-74	3 (удовлетворительно)	зачтено
E	60-69	3 (удовлетворительно)	зачтено
FX	35-59	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной аттестации	не зачтено
F	0-34	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной сдачи при условии обязательного набора дополнительных баллов	не зачтено

## 11. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ И ИНВАЛИДОВ

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- 1) для слепых и слабовидящих:

- лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
- для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;

- письменные задания оформляются увеличенным шрифтом.

2) для глухих и слабослышащих:

- лекции оформляются в виде электронного документа;
- письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
- экзамен проводится в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.

3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
- письменные задания выполняются на компьютере;
- экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

1) для слепых и слабовидящих:

- в печатной форме увеличенным шрифтом;
- в форме электронного документа;

2) для глухих и слабослышащих:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.

3) для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.

## 12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя. Выход в Интернет проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины применяются электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

### 13. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

#### Основная литература

1. Заставный, В. П. Геометрия масс: учебное пособие / В. П. Заставный - 2-е изд., изм. и доп. - Донецк: ДонНУ, 2021. — 111 с.  
[http://library.donnu.ru/el/ed/3912\\_HM6O.pdf](http://library.donnu.ru/el/ed/3912_HM6O.pdf)
2. Машаров П.А. Интегралы по различным геометрическим фигурам [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / П.А. Машаров – Донецк: ДонНУ, 2017. – Электронные данные (1 файл).

#### Дополнительная литература

3. Павлов А. Л. Избранные разделы математики: алгебра и геометрия: учебное пособие [Электронный ресурс] / А. Л. Павлов. – Донецк : ДонНУ, 2016. – Электронные данные (1 файл).
4. Лурье, М. В. Геометрия : Техника решения задач / М. В. Лурье. - 2-е изд. - М.: Учеб.-науч. центр довуз. образования : Физматлит, 2002. - 240 с.
5. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука, 1987.  
[https://math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant-15/Kv61-87\\_Geometriya\\_Mass\\_M.B.Balk.djvu](https://math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant-15/Kv61-87_Geometriya_Mass_M.B.Balk.djvu)
6. Горр, Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев ; Донецкий нац. ун-т ; Ин-т прикладной математики и механики НАН. - Донецк : ДонНУ, 2010. - 364 с.
7. Гашков, С.Б. Центры тяжести и геометрия / С.Б. Гашков. – М.: МЦНМО, – 2015. – 64 с. <https://www.mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.40.pdf>
8. Эвнин, А.Ю. Метод масс в задачах / А.Ю. Эвнин // Математическое образование – 2015. выпуск 1(73). – с. 27—47.  
[http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=15&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=15&option_lang=rus)

### 14. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. Научная электронная библиотека elibrary.ru : информ.-аналит. портал / ООО Научная электронная библиотека. – Москва : ООО Науч. электрон. б-ка,

сop. 2000–2022. – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 01.01.2023). – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. Электронный каталог Научной библиотеки Донецкого государственного университета. – Донецк : НБ ДонГУ, 1999– . – URL: <http://catalog.donnu.education> (дата обращения: 01.01.2023). – Текст : электронный;

3. Учебники и другие книги по математике URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный

4. Интернет-библиотека Виталия Арнольда URL: <http://ilib.mcsme.ru/> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный;

5. Техническая библиотека URL: <http://techlibrary.ru/> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный;

6. Научные журналы ФГБОУ ВО «ДонГУ» URL: <http://donnu.ru/science/journals> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

## **15. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).